А.А. Грешилов, И.В. Дубограй

Вычисление пределов функций • Техника дифференцирования • Исследование функций и построение графиков

Компьютерный курс

Учебное пособие

Москва • «Логос» • 2003

УДК 517
ББК 22.161
Г81

Грешилов А.А., Дубограй И.В.
Г81 Вычисление пределов функций. Техника дифференцирования. Исследование функций и построение графиков / Под ред. А.А. Грешилова. Учеб. пособие. – М.: Логос, 2003. – 176 с.: ил.
ISBN 5-94010-218-2

Рассмотрены способы вычисления пределов функций (методы раскрытия основных видов неопределенностей), методы дифференцирования функций, заданных в явной, неявной и параметрической формах, а также способы исследования функций одной переменной и построение их графиков.

Предназначено для студентов высших и средних специальных учебных заведений, а также для слушателей подготовительных отделений и школьников старших классов специализированных и общеобразовательных школ. Может использоваться студентами и учащимися при самостоятельной подготовке и дистанционном обучении.

ББК 22.161

ISBN 5-94010-218-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Достижения последнего периода в развитии вычислительной техники и средств связи позволяют во всех областях знания создавать такие электронные учебные пособия, использование которых на аудиторных и самостоятельных занятиях школьников и студентов, а также при дистанционном обучении существенно повышает эффективность учебного процесса.

Как правило, в электронных учебных пособиях, реализуемых на компьютерах, приводятся типовые задачи, рассматриваются примеры их решения, т.е. в той или иной мере воспроизводится методика организации занятий под руководством преподавателя. Конечно, это дает заметный дидактический эффект, расширяет возможности для самостоятельных занятий, но такая педагогическая технология, как правило, не позволяет обучаемым управлять ходом представления учебного материала, ограничивает возможности индивидуализации учебного процесса.

Принципиально иной подход применен в настоящем учебном пособии. Как и в других электронных пособиях,здесь тоже рассматриваются методы решения наиболее типичных задач. Но на каждом этапе в решении любой задачи участвует обучаемый – можно сказать, что в известном смысле он решает ее сам.

Как же это достигается? Прежде всего обучаемый знакомится с представленным в пособии набором алгоритмов и выбирает из них самый приемлемый для конкретной задачи. Затем согласно выбранному алгоритму решение задачи разбивается на последовательность шагов. На каждом из этих шагов обучаемому предлагаются различные ответы (среди которых один верный) и подсказка, которую обучаемый может вызвать в тот момент, когда она ему необходима. Другими словами, обучаемый должен не угадать ответ, а проделать необходимые выкладки и получить его.

Кроме набора задач по каждой теме приводятся краткие сведения из теоретического курса. Из этих сведений и формируются подсказки в процессе решения задачи. Такой подход к построению учебного материала обеспечивает решение каждой задачи – от определения ее условий до получения правильного ответа – в интерактивном режиме. Научившись решать все задачи по данной теме, обучающийся может быть уверен в своих знаниях по ней.

Это учебное пособие в комплекте с аналогичными пособиями по другим разделам математики было разработано и впервые использовано преподавателями высшей математики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. В дальнейшем пособия нашли применение и в других высших учебных заведениях, а также на подготовительных курсах для поступающих в вузы. В 1999–2000 гг. пособия были изданы в виде девяти книг карманного формата. Они получили хорошие отзывы от преподавателей, студентов и слушателей подготовительных отделений, неоднократно демонстрировались на выставках, ими интересовались специалисты из зарубежных стран, а в Португалии их выпустили отдельным изданием.

Настоящее издание представляет собой комплект, состоящий из книги и лазерного диска. В нем рассматриваются следующие темы: вычисление пределов функций, техника дифференцирования, исследование функций и построение графиков.

Использование компьютера расширяет возможности пособия, позволяет не отвлекаться при вызове подсказок, многократно прорабатывать изучаемый материал. Файлы каждого раздела пособия помещены в папку соответствующего названия. На лазерном диске представлены электронные и печатные версии учебных пособий.

Для работы с электронной версией пособий необходимо:

• скопировать папку «Электронная версия пособий» с лазерного диска на винчестер;

• войти в эту папку и снять атрибут «Только чтение» со всех файлов ее подпапок.

Если для копирования применяется программа-оболочка Far, то атрибут «Только чтение» можно снять с помощью настроек параметров этой программы перед началом копирования. В Windows 95/98 для снятия атрибута «Только чтение» следует сначала выделить все файлы папки, а затем вызвать из падающего меню «Файл» или из контекстного меню окно «Свойства», сбросить в нем галочку у флажка «Только чтение» раздела «Атрибуты», навести указатель мыши на кнопку «ОК» и нажать левую кнопку мыши;

• перейти в папку «Электронная версия пособий» и запустить программу. Навести мышь на «Электронную версию» и щелкнуть ею, затем

дважды щелкнуть нужный раздел пособия и запустить программу «Konplay.exe». При этом появится чистое окно с панелью управления вдоль правого края окна. Щелкнуть мышью по верхнему квадратику в панели управления,и откроется второе окно программы «Konplay.exe». Теперь можно выбрать для просмотра либо каждую задачу по отдельности, либо все задачи подряд, если указать раздел «Zgeneral.sqn».

Пособие состоит из трех разделов. Начальные файлы каждого раздела имеют расширение .SQN. Список этих файлов выводится во втором окне программы «Konplay.exe». Выбрать интересующий вас раздел можно обычным способом выделения файла из списка, принятым в Windows. Тогда вы увидите название раздела в верхней строке окна выбора разделов.

Перемещение по окнам с текстами пособия осуществляется наведением указателя мыши на стрелки («Вперед»), («Назад») панели управления и нажатием на левую кнопку мыши. Работа как с пособием, так и разделом завершается щелчком левой кнопки мыши по кнопке «Х» панели управления. Навигационные кнопки, кнопка завершения работы и кнопка обновления окна программы «Konplay.exe» находятся на панели управления, расположенной вдоль правого края окна.

Пособие состоит из информационных окон и окон контрольных заданий с текстами вариантов ответов. Выбор варианта ответа и последующая оценка его правильности осуществляются наведением указателя мыши на текст ответа и щелчком ее левой кнопки. Если вы выбрали ошибочный вариант ответа, то в следующем окне можно получить характеристики причины ошибки, щелкнув указателем подсказки.

Чтобы открыть книжную версию пособия, после запуска программы «Интегрирование.exe» необходимо щелкнуть «Книжная версия», а затем дважды щелкнуть нужный раздел пособия.

В числе требований к операционной системе, позволяющей использовать учебные пособия, выделим следующие:

1. Windows 95/98/NT/2000.

2. Компоненты «Мультимедиа» Windows — «Лазерный проигрыватель», «Сжатие аудиозаписей», «Сжатие видеозаписей».

Итак, на поставленный вопрос дается серия ответов (☞), один из которых верный, и подсказка (🕮), облегчающая нахождение ответа на вопрос. Если вы затрудняетесь найти верный ответ на поставленный вопрос, то на последней странице каждого раздела пособия вы можете ознакомиться с верным ответом.

Учебное пособие предназначено для студентов высших и средних специальных учебных заведений, а также для слушателей подготовительных отделений и школьников старших классов специализированных и общеобразовательных школ. Оно в равной мере полезно и при самостоятельной подготовке, и при дистанционном обучении, и на аудиторных занятиях.

Для желающих расширить свои знания предлагаются два аналогичных издания: «Вычисление неопределенных интегралов и дифференциальные уравнения» (М.: Логос, 2003) и «Аналитическая геометрия, векторная алгебра и кривые второго порядка» (М.: Логос, 2003).

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

Эта часть обучающего методического пособия посвящена изучению способов вычисления пределов функций; рассмотрены методы раскрытия основных видов неопределенностей.

Она состоит из двух разделов. В разд. I рассматриваются способы избавления от неопределенностей типа: $\left[\frac{0}{0}\right]$; $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и $\left[1^{\infty}\right]$, а также методы приведения к неопределенностям этого типа других вариантов неопределенностей, например $[\infty-\infty]$; $[0-\infty]$. В разд. II разбирается вычисление пределов с помощью правила Лопиталя (для работы с этой частью требуется умение дифференцировать функции).

При рассмотрении случаев раскрытия часто встречающихся неопределенностей предполагается, что вам известны следующие *свойства пределов*:

$$\lim_{x\to *}\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)=\lim_{x\to *} f_1(x)\pm f_2(x).$$

$$\lim_{x\to *}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right)=\lim_{x\to *} f_1(x)\cdot \lim_{x\to *} f_2(x).$$

$$\lim_{x\to *}\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to *} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to *} f_2(x)},$$

где $\lim\limits_{x\to *} f_2(x)\neq 0$.

Если $\lim\limits_{x\to *} f(x)$ существует, то $\lim\limits_{x\to *} f(x)=f(*)$.

Раздел I. ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ТИПА $\left[\frac{0}{0}\right]$; $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и $[1^{\infty}]$

Алгоритм решения

1. Подставить в выражение предельное значение аргумента.

2. Определить есть или нет неопределенность. Если нет, дать ответ.

3. Если неопределенность есть, то по ее виду выбрать одно из правил устранения этой неопределенности.

4. Преобразовать выражение согласно выбранному правилу, и к новой форме предела применить данный алгоритм, начиная с п. 1.

Правило 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\Rightarrow$ В числителе и знаменателе вынести x в максимальной степени, если это возможно. Заметим, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\left[\dfrac{c}{\infty}\right]=0$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\left[\dfrac{\infty}{c}\right]=\infty$, где c — любое число.

Правило 2. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\Rightarrow$ Числитель и знаменатель разделить одновременно на $(x-x_0)$, если это возможно. Необходимо иметь в виду, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\left[\dfrac{0}{c}\right]=0$, а $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\left[\dfrac{c}{0}\right]=\infty$, где c — число, отличное от нуля.

Правило 3. При вычислении пределов от иррациональных выражений, не попадающих в предыдущие правила, необходимо избавиться от корней, входящих в неопределенность. Возможны следующие способы:

3.1. Замена переменной $x=t^m$, позволяющая извлечь корни, входящие в неопределенность.

3.2. Дополнение до формулы, позволяющей возвести корень в соответствующую ему степень. Здесь используются формулы: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.

Например,

$$\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}\right)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}\right)}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}=\frac{a-b}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}},$$

т. е. умножили и разделили на сопряженное выражение.

Правило 4. При наличии неопределенности в пределе от выражения, содержащего тригонометрические функции, следует выделить в этом выражении *первый замечательный предел*:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1. \qquad (1)$$

Можно использовать следствия этого предела:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}=1; \quad (2) \qquad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\alpha}=1; \quad (3)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{arc\,tg}\alpha}{\alpha}=1; \quad (4) \qquad \lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{2}. \quad (5)$$

Правило 5. Предел сложнопоказательной функции:

$$\lim_{x\to *}[f(x)]^{\varphi(x)}=\left(\lim_{x\to *}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to *}\varphi(x)}=[f(*)]^{\varphi(*)}.$$

Если рассматриваемый предел содержит неопределенность 1^{∞}, то он сводится ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e \qquad (1)$$

или

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}. \qquad (2)$$

Правило 6. Предел сложной функции:

$$\lim_{x\to *}(f(\varphi(x)) = f(\lim_{x\to *}\varphi(x)).$$

В частности, $\lim\limits_{x\to *}\ln f(x) = \ln(\lim\limits_{x\to *} f(x))$, если $\lim\limits_{x\to *} f(x) > 0$.

Необходимо помнить следующие *свойства логарифмов*:

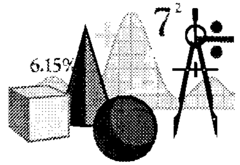
$$\log_a A + \log_a B = \log_a (A\cdot B), \qquad \log_a A - \log_a B = \log_a (A/B),$$

$$k\log_a A = \log_a A^k, \qquad \log_b c = (\log_a c)/(\log_a b).$$

Есть пределы, которыми можно пользоваться как «*табличными*»:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1, \qquad (1) \qquad \lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha} = 1, \qquad (3)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{\ln a}, \qquad (2) \qquad \lim_{\alpha\to 0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha} = \ln a. \qquad (4)$$



Задача 1

Вычислите $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(\pi/x)}{x^2-4x+4}$.

1.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $x = 2$:

☞ $\left[\dfrac{0}{0}\right]$; ☞ $\left[\dfrac{-1}{0}\right]$; ☞ $\left[\dfrac{1}{0}\right]$.

🕮 См. таблицу тригонометрических функций.

1.2. Укажите можно ли сразу дать определенный ответ или получили неопределенность:

☞ получили неопределенность;

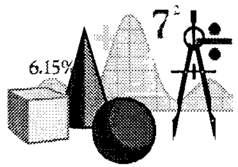
☞ можно дать определенный ответ.

🕮 См. правило 2.

1.3.Укажите верный ответ задачи:

☞ 0; ☞ ∞; ☞ 1.

🕮 См. правило 2.



Задача 2

Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{4x^4+5}}$.

2.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $x \to \infty$ в выражение $\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{4x^4+5}}$:

☞ ∞/∞; ☞ $1/\sqrt{5}$; ☞ $3/4$.

2.2. Укажите можно ли сразу дать определенный ответ или получили неопределенность:

☞ можно сразу дать определенный ответ;
☞ получили неопределенность.

2.3. Укажите способ избавления от этой неопределенности:

☞ вынести в числителе и знаменателе x в максимальной степени;
☞ разложить многочлены на множители и упростить дробь.

🕮 См. правило 1.

2.4. Выполните выбранное действие и укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(3+4x+1)}{x^2\sqrt{4+5}}$; ☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(3+4/x+1/x^2)}{x^4\sqrt{4+5/x^4}}$;

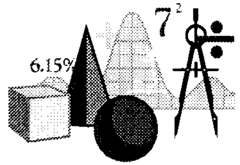
☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2(3+4/x+1/x^2)\big/\left(x^2\sqrt{4+5/x^4}\right)\right]$.

🕮 $\sqrt{4x^4+5}=\sqrt{x^4(4+5/x^4)}=x^2\sqrt{4+5/x^4}$.

2.5. Вычислите этот предел и укажите верный ответ.

☞ 8/3; ☞ 3/2; ☞ 3/4.

🕮 См. алгоритм решения и правило 1.



Задача 3

Вычислите: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-x^2-x+1}$.

3.1. Подставьте непосредственно $x = 1$ в выражение $\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-x^2-x+1}$. Укажите верный ответ:

☞ 0; ☞ ∞; ☞ [0/0].

3.2. Укажите, является ли этот результат неопределенностью или можно сразу дать определенный ответ:

☞ можно сразу дать определенный ответ;
☞ получена неопределенность.

3.3. Укажите каким образом можно избавиться от этой неопределенности:

☞ вынести в числителе и знаменателе x в максимальной степени;
☞ разделить числитель и знаменатель на $(x - 1)$.

🕮 См. правило 2.

3.4. Разделите числитель на $(x - 1)$. Укажите, что при этом получится:

☞ (x^2-4x+3); ☞ (x^2-4x-3); ☞ $(x^2-6x+13)$.

🕮 Преобразуйте числитель, выделив множитель $(x - 1)$, либо разделите «уголком».

3.5. Разделите знаменатель (x^3-x^2-x+1) на $(x - 1)$. Укажите, что при этом получится:

☞ (x^2-x); ☞ (x^2+1); ☞ (x^2-1).

🕮 $x^3-x^2-x+1=(x^3-x^2)-(x-1)=(x-1)(x^2-1)$ или разделите уголком.

3.6. Укажите, что получается при подстановке $x = 1$ в преобразованное выражение $(x^2-4x+3)/(x^2-1)$:

☞ 0; ☞ ∞; ☞ [0/0].

🕮 См. алгоритм решения.

3.7. Укажите, каким образом можно избавиться от этой неопределенности:

☞ вынести в числителе и знаменателе x в максимальной степени;

☞ разделить числитель и знаменатель на $(x-1)$.

🕮 См. правило 2.

3.8. Выполните это действие и укажите, что при этом получится:

☞ $\lim\limits_{x\to 1}[(x-3)/(x+1)]$; ☞ $\lim\limits_{x\to 1}[(x+3)/(x+1)]$;

☞ $\lim\limits_{x\to 1}[(x-3)/(x-1)]$.

🕮 Можно, например, решив уравнения $x^2-4x+3=0$ и $x^2-1=0$, найти корни многочленов и разложить их на множители: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3.9. Укажите, что получается при подстановке $x = 1$ в преобразованное выражение:

☞ $-2/0$; ☞ $-2/2$; ☞ $4/2$.

Задачи для самостоятельной работы

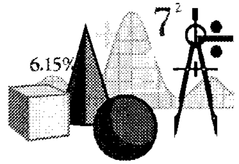
Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{25x^3+7}}{\sqrt[3]{8x^6+5x^3+1}}$. б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+x+7}{(5x^2+1)(3x+2)}$.

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4x-12}$. г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$

🕮 а) см. правило 1; б) см. правило 1; в) см. правило 2; г) см. правило 2.

Ответ. а) 0; б) 2/15; в) $-1/8$; г) 2.



Задача 4

Вычислите предел: $\lim\limits_{x\to 3}\left[\left(\sqrt[4]{x-2}-1\right)/\left(\sqrt[6]{x-2}-1\right)\right]$.

4.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $x = 3$ в подпредельное выражение:

☞ $[\infty/\infty]$; ☞ [0/0]; ☞ 1.

4.2. Укажите, как избавиться от этой неопределенности:

☞ вынести в числителе и знаменателе x в максимальной степени;

☞ разделить числитель и знаменатель на $(x-3)$.

☞ избавиться сначала от иррациональности, входящей в выражение.

🕮 См. правило 3 (воспользоваться правилом 2 нельзя, поскольку в таком виде числитель и знаменатель на $(x-3)$ не делятся).

4.3. Укажите, какая подстановка (замена переменной) позволит избавиться от радикалов $\sqrt[4]{x-2}$ и $\sqrt[6]{x-2}$ одновременно:

☞ $x-2=t^4$; ☞ $x-2=t^6$; ☞ $x-2=t^{12}$.

🕮 См. правило 3.1. Использование правила 3.2 тоже возможно, но менее рационально в этой задаче.

4.4. Преобразуйте данный предел, используя эту подстановку. Укажите, что при этом получится:

☞ $\lim\limits_{x\to 3}\left[(t^3-1)/(t^2-1)\right]$; ☞ $\lim\limits_{t\to 1}\left[(t^3-1)/(t^2-1)\right]$;

☞ $\lim\limits_{x\to 3}\left[(t^3-1)/(t^2-1)\right]$.

🕮 $t=\sqrt[12]{x-2}$ и если $x\to 3$, то $t\to\sqrt[12]{3-2}=1$.

4.5. Укажите, что получается при подстановке $t=1$ в новое выражение:

☞ $[\infty/\infty]$; ☞ $[0/0]$; ☞ 1.

4.6. Укажите, каким образом можно избавиться от этой неопределенности:

☞ вынести в числителе и знаменателе t в максимальной степени;

☞ разделить числитель и знаменатель на $(t-1)$.

🕮 См. правило 2.

4.7. Преобразуйте выражение выбранным способом. Укажите верный ответ.

☞ $\lim\limits_{t\to1}\left[\left(t^2+t+1\right)/(t+1)\right]$; ☞ $\lim\limits_{t\to1}\left[\left(t^2+2t+1\right)/(t+1)\right]$;

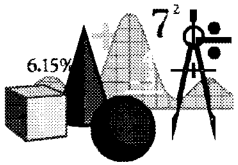
☞ $\lim\limits_{t\to1}\left[\left(t^2-t+1\right)/(t+1)\right]$.

🕮 См. правило 3.2 (формулы).

4.8. Вычислите этот предел. Укажите верный ответ:

☞ $[0/0]$; ☞ 1; ☞ 3/2.

🕮 Подставьте в преобразованное выражение $t=1$.



Задача 5

Вычислите: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x-3}}{x-3}$.

5.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $x = 3$ в подпредельное выражение:

☞ 0; ☞ ∞; ☞ неопределенность $[0/0]$.

5.2. Укажите, как избавиться от этой неопределенности.

☞ вынести в числителе и знаменателе в максимальной степени;

☞ разделить числитель и знаменатель на $(x-3)$;

☞ предварительно избавиться от корней, входящих в неопределенность.

🕮 См. правило 3 (наличие корней мешает воспользоваться правилом 2).

5.3. Как преобразовать данное выражение, чтобы корни, входящие в неопределенность, исчезли? Укажите верный ответ:

☞ заменить переменную;

☞ дополнить выражение в числителе до разности квадратов.

🕮 Невозможно подобрать такую новую переменную, чтобы оба корня исчезли. См. правило 3.

5.4. Дополните числитель до разности квадратов и упростите выражение. Укажите верный ответ.

☞ $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-2x}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{4x-3})}$; ☞ $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{4x-3}}$;

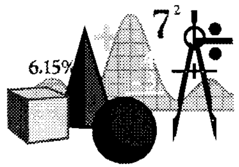
☞ $\lim\limits_{x\to3}(-2)$.

🕮 См. правило 3.2.

5.5. Вычислите этот предел. Укажите верный ответ.

☞ ∞; ☞ $-1/3$; ☞ $-2/9$.

🕮 Подставьте $x = 3$.



Задача 6

Вычислите предел: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-4x+1}\right)$.

6.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $x = -\infty$:

☞ 0; ☞ неопределенность $[\infty, -\infty]$; ☞ ∞.

6.2. Укажите, как избавиться от этой неопределенности:
☞ вынести x в максимальной степени;
☞ предварительно избавиться от иррациональности, входящей в неопределенность.
🕮 См. правило 3.

6.3. Укажите, как преобразовать

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-4x+1}\right),$$

чтобы корни, входящие в неопределенность, исчезли:

☞ заменить переменную;
☞ дополнить данное выражение до разности квадратов.
🕮 Невозможно подобрать такую переменную, чтобы оба корня одновременно исчезли. См. правило 3.

6.4. Преобразуйте выражение данным способом, упростите его и укажите верный ответ.

☞ $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x$; ☞ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-4x+1}}$;

☞ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x+2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-4x+1}}$.

🕮 См. правило 3.2.

6.5. Следуя алгоритму решения, подставьте в новое выражение $-\infty$ вместо x. Укажите верный ответ.

☞ 5/2; ☞ 0; ☞ неопределенность $[-\infty/\infty]$.

6.6. Укажите, как избавиться от этой неопределенности:
☞ вынести в числителе и знаменателе x в максимальной степени;
☞ избавиться от корней, входящих в неопределенность.
🕮 См. правило 1. Наличие корней в преобразованном выражении не мешает воспользоваться правилом 1, поэтому от этих корней избавляться не надо.

6.7. Преобразуйте выражение данным способом. Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x}{x\left(\sqrt{1+1/x+1/x^2}+\sqrt{1-4/x+1/x^2}\right)}$;

☞ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x}{(-x)\left(\sqrt{1+1/x+1/x^2}+\sqrt{1-4/x+1/x^2}\right)}$.

🕮 Необходимо помнить, что $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

6.8. Упростите получившееся выражение и вычислите предел. Укажите верный ответ.

☞ $[\infty/\infty]$; ☞ 5/2; ☞ – 5/2.

🕮 Сократите дробь на x и аккуратно подставьте в новое выражение $x = -\infty$. См. правило 1.

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 64}\left[\left(\sqrt[3]{x}-4\right)/\left(\sqrt{x-8}\right)\right]$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\left[\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)/\left(\sqrt{x+2}-1\right)\right]$;

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-x\right)$.

🕮 1. См. правила 3.1 и 2.
2. См. правила 3.2 и 2.
3. См. правила 3.2. и 1.

Ответ. а) 1/3; б) –1; в) 3/2.

Задача 7

Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 7x/x)$.

7.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $x = 0$ в подпредельное выражение:

☞ ∞; ☞ неопределенность [0/0]; ☞ 0.

🕮 $\sin 0 = 0$.

7.2. Укажите, как избавиться от неопределенности в данной задаче:

☞ вынести в числителе и знаменателе x в максимальной степени;

☞ разделить числитель и знаменатель на x;

☞ использовать первый замечательный предел.

🕮 См. правило 4.

7.3. Укажите, является ли $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 7x/x)$ первым замечательным пределом:

☞ не является; ☞ является.

🕮 См. правило 4, формулу (1).

7.4. Выделите в данном выражении первый замечательный предел. Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7\sin x}{x}$; ☞ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}$;

☞ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}\cdot\dfrac{7}{1}$.

🕮 См. правило 4, формулу (1). Сравните данный предел с первым замечательным, $\alpha(x) = 7x$. Помните, что преобразование должно быть тождественным.

7.5. Вычислите получившийся предел. Укажите верный ответ:

☞ 1; ☞ 7; ☞ 0.

🕮 См. правило 4. Используйте: $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 7x/7x) = [\alpha = (7x)\to 0] = 1$.

Задача 8

Вычислите $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left[(1-\cos\alpha)/\alpha^2\right]$. (Выведите формулу (5), правило 4.)

8.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $\alpha = 0$:

☞ ∞; ☞ неопределенность [0/0]; ☞ 1.

🕮 $\cos 0 = 1$.

8.2. Укажите, как избавиться от неопределенности:

☞ вынести в числителе и знаменателе α в максимальной степени;

☞ числитель и знаменатель разделить на α;

☞ выделить первый замечательный предел.

🕮 См. правило 4.

8.3. Преобразуйте выражение, упростите и укажите верный ответ:

☞ $\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$; ☞ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$; ☞ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1}{\alpha^2}$.

🕮 См. свойства пределов.

8.4. Вычислите получившийся предел. Укажите верный ответ.

☞ 0; ☞ 1/4; ☞ 1/2.

🕮 См. правило 4, формулу (1).

Задача 9

Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\right]$.

9.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $x=\infty$:

☞ 0; ☞ ∞; ☞ неопределенность $[\infty\cdot 0]$.

9.2. Укажите, как избавиться от неопределенности в данной задаче:

☞ ответ очевиден: $[\infty\cdot 0]=0$;

☞ ответ очевиден: $[\infty\cdot 0]=\infty$;

☞ необходимо выделить первый замечательный предел или одно из его следствий.

🕮 См. правило 4.

9.3. Укажите, с каким из следующих пределов удобнее сравнить данный:

☞ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$; ☞ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}=\dfrac{1}{2}$; ☞ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}=1$.

🕮 См. правило 4.

9.4. Укажите, что в данном пределе играет роль $\alpha\to 0$:

☞ $\alpha=1/x$; ☞ $\alpha=x$; ☞ $\alpha=x^2$.

🕮 Если $x\to\infty$, то $1/x\to 0$.

9.5. Преобразуйте $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left[1-\cos(1/x)\right]$ так, чтобы можно было воспользоваться формулой $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left[(1-\cos\alpha)/\alpha^2\right]=1/2$. Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; ☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos(1/x)}{x^2}$; ☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos(1/x)}{(1/x)^2}$.

🕮 $x^2=1/x^{-2}=1/(1/x)^2$.

9.6. Вычислите получившийся предел. Укажите верный ответ:

☞ 1; ☞ 1/2; ☞ неопределенность [0/0].

🕮 См. правило 4, формулу (5) при $\alpha=1/x$.

Задача 10

Вычислите $\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)\operatorname{tg}(\pi x/2)\right]$.

10.1. Укажите, что получается при подстановке $x=1$:

☞ 0; ☞ ∞; ☞ неопределенность $[0\cdot\infty]$.

🕮 $\lim\limits_{x\to\pi/2}\operatorname{tg}x=\infty$.

10.2. Укажите, как избавиться от этой неопределенности:

☞ ответ очевиден: $[0\cdot\infty]=0$;

☞ ответ очевиден: $[0\cdot\infty]=\infty$;

☞ выделить первый замечательный предел или одно из его следствий.

🕮 См. правило 4.

10.3. Укажите верную замену:

☞ $x=1+t,\ t\to 0$; ☞ $\pi x/2=t,\ t\to 0$; ☞ $x+1=t,\ t\to 0$.

🕮 Помните, что $x\to 1$, а надо, чтобы $t\to 0$.

10.4. Преобразуйте $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}(\pi x/2)$, подставляя $x=1+t$, упростите выражение. Укажите верный ответ:

☞ $-\lim\limits_{t\to 0} t\operatorname{ctg}(\pi t/2)$; ☞ $\lim\limits_{t\to 0} t\operatorname{ctg}(\pi t/2)$;

☞ $\lim\limits_{t\to 0} t\operatorname{tg}(\pi t/2)$; ☞ $-\lim\limits_{t\to 0} t\operatorname{tg}(\pi t/2)$.

🕮 $\operatorname{tg}\pi(t+1)/2=\operatorname{tg}(\pi t/2+\pi/2)=-\operatorname{ctg}(\pi t/2)$ (формулы приведения).

10.5. Выделите первый замечательный предел. Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\pi t/2}{\sin(\pi t/2)}\dfrac{\cos(\pi t/2)}{\pi/2}$ при $\alpha=\pi t/2\to 0$.

☞ $\lim\limits_{t\to 0}\left[t/\sin(\pi t/2)\right]\cos(\pi t/2)$ при $\alpha=\pi t/2\to 0$.

☞ $\lim\limits_{t\to 0}(t/\sin t)\cos(\pi t/2)$ при $\alpha=t\to 0$.

🕮 См. правило 4, сравнить с формулой (1).

10.6. Вычислите его. Укажите верный ответ:

☞ $\pi/2$; ☞ $2/\pi$; ☞ 0.

🕮 См. правило 4 формулу (1). $\lim\limits_{t\to 0} t\operatorname{ctg}(\pi t/2)$ можно было сравнить с $\lim\limits_{\alpha\to 0}(\operatorname{tg}\alpha/\alpha)$.

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$. б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg}5x}$. г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{x}$.

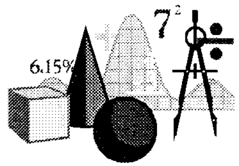
🕮 1. $y=\sin x$ — функция ограниченная, $|\sin x|\le 1$;

2. См. правило 4, формулы (1) и (3);

3. См. правило 4 ($x=\pi+t,\ t\to 0$) и формулы (1) и (5);

4. См. правило 4 ($\arcsin 4x=t,\ x=\frac{1}{4}\sin t,\ t\to 0$) или формулу (2).

Ответы: а) 0; б) 2/5; в) 9/98; г) 4.



Задача 11

Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^x$.

11.1. Укажите, к чему приводит непосредственная подстановка $x = 0$:

☞ к неопределенности $[0/0]^0$;

☞ к неопределенности $[\infty/\infty]^0$;

☞ к конкретному результату $[2/3]^0$.

11.2. Укажите, является ли результат подстановки неопределенностью или ответ можно получить сразу:

☞ ответ можно получить сразу;

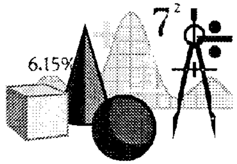
☞ получили неопределенность.

🕮 См. правило 5.

11.3. Вычислите этот предел. Укажите верный ответ:

☞ 2/3; ☞ 1; ☞ 0.

🕮 Если $c\ne 0$, то $c^0=1$.



Задача 12

Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{2/x}$.

12.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $x = 0$:

☞ $[1]$; ☞ $[1^{\infty}]$; ☞ $[2^{\infty}]$.

🕮 $\sin 0 = 0$.

12.2. Укажите, является ли результат подстановки неопределенностью или ответ можно получить сразу:

☞ получена неопределенность;

☞ ответ можно получить сразу.

🕮 См. правило 5.

12.3. Укажите, как избавиться от этой неопределенности:

☞ ответ очевиден $[1^{\infty}]=1$;

☞ свести данный предел к первому замечательному пределу;

☞ свести данный предел ко второму замечательному пределу.

🕮 См. правило 5, формулу (1).

12.4. Сравните данный предел со вторым замечательным пределом. Укажите, что в данном пределе играет роль α, стремящегося к нулю:

☞ $\alpha = x \to 0$; ☞ $\alpha = \sin 2x \to 0$; ☞ $\alpha = 2x \to 0$.

🕮 См. правило 5, формулу (1).

12.5. Выделите второй замечательный предел при $\alpha = \sin 2x$. Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin 2x)^{1/\sin 2x}\right]^{2/x}$; ☞ $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin 2x)^{1/2x}\right]^{4}$;

☞ $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin 2x)^{1/\sin 2x}\right]^{\sin 2x\cdot 2/x}$.

🕮 См. правило 5, формулу (1); $\alpha = \sin 2x$.

12.6. Вычислите частично этот предел, используя второй замечательный предел. Укажите верный ответ:

☞ $e^{\lim\limits_{x\to 0}(2/x)}$; ☞ $e^{\lim\limits_{x\to 0}(2\sin 2x/x)}$; ☞ $e^{\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x)}$.

🕮 См. правило 5, формулу (1).

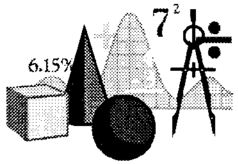
12.7. Вычислите $A = \lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x/x)$. Укажите верный ответ:

☞ $A = 2$; ☞ $A = 0$; ☞ $A = 1$.

🕮 См. правило 4 и задачу 7.

12.8. Получите окончательный ответ:

☞ e; ☞ e^4; ☞ 1.



Задача 13

Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{2x}$.

13.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $x = \infty$:

☞ неопределенность $[\infty/\infty]^{\infty}$;

☞ $[3^{\infty}]$;

☞ неопределенность $[0^{\infty}]$.

13.2. Укажите, как избавиться от этой неопределенности:

☞ возвести отдельно числитель и знаменатель в указанную степень и вычислить предел дроби;

☞ избавиться предварительно от неопределенности в выражении $(x+3)/x$.

13.3. Укажите, какое действие для этого требуется выполнить:

☞ в числителе и знаменателе вынести x в максимальной степени;

☞ выделить второй замечательный предел.

🕮 См. правило 1.

13.4. Преобразуйте выражение выбранным способом. Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)$; ☞ $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)$; ☞ $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3)$.

13.5. Укажите, как избавиться от этой неопределенности:

☞ выделить первый замечательный предел;

☞ выделить второй замечательный предел;

☞ ответ очевиден: $\left[1^\infty\right]=e$.

🕮 См. правило 5.

13.6. Сравните данный предел со вторым замечательным пределом в виде $\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e$. Что в этом пределе играет роль $\alpha\to0$?

☞ $\alpha=1/x\to0$; ☞ $\alpha=2x\to0$; ☞ $\alpha=3/x\to0$.

🕮 Если $x\to\infty$, то $1/x\to0$ и $\alpha=3/x\to0$.

13.7. Выделите второй замечательный предел с $\alpha=3/x\to0$. Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+3/x)^{x/3}\right]^6$; ☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(3/x)(1+(3/x))^{x/3}\right]^6$;

☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+3/x)^x\right]^2$.

🕮 См. правило 5, формулу (1). Подставьте $\alpha=3/x$.

13.8. Укажите окончательный ответ:

☞ e; ☞ e^6; ☞ 1.

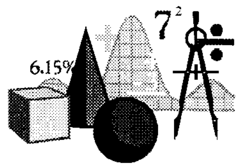
🕮 См. правило 5, формулу (1).

🕮 Можно было воспользоваться другой формулой правила 4: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+k/x)^x=e^k$. Тогда преобразование данного выражения выглядело бы так:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^{2x}=\left[1^\infty\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[(1+3/x)^x\right]^2=[k=3]=\left(e^3\right)^2=e^6.$$

См. правило 5, формулу (2).



Задача 14

Вычислите $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{2x+1}{x+3}\right)^{10/(x-2)}$.

14.1. Укажите, что получается при подстановке $x=2$:

☞ e^{10}; ☞ $\left[1^\infty\right]$; ☞ 1.

14.2. Укажите, как избавиться от полученной неопределенности:

☞ выделить первый замечательный предел;

☞ выделить второй замечательный предел;

☞ ответ очевиден — $\left[1^\infty\right]=e$.

🕮 См. правило 5.

14.3. Укажите, в каком виде для данного предела удобнее использовать второй замечательный предел:

☞ $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e$; ☞ $\lim\limits_{x\to\infty}(1+k/x)^{x}=e^{k}$.

🕮 См. правило 5, формулы (1) и (2).

14.4. Укажите, как $\dfrac{2x+1}{x+3}$ преобразуется к виду $(1+\alpha)$:

☞ $\lim\limits_{x\to 2}\left(1+\dfrac{x+4}{x+3}\right)^{10/(x-2)}$; ☞ $\lim\limits_{x\to 2}\left(1+\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{10/(x-2)}$;

☞ $\lim\limits_{x\to 2}\left(1+\dfrac{2x+1}{x+3}\right)^{10/(x-2)}$.

🕮 Преобразование должно быть тождественным, т. е. $a=1+(a-1)$.

14.5. Сравните полученное выражение со вторым замечательным пределом и укажите, что здесь играет роль $\alpha\to 0$ при $x\to 2$..

☞ $\alpha=(x-2)/(x+3)$; ☞ $\alpha=1/(x+3)$; ☞ $\alpha=(x-2)$.

🕮 Сравните $(1+\alpha)$ и $\left(1+\dfrac{x-2}{x+3}\right)$.

14.6. Выделите второй замечательный предел. Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(1+\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{\frac{1}{x-2}}\right]^{10}$; ☞ $\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(1+\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{x-2}}\right]^{10}$;

☞ $\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(1+\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{x-2}}\right]^{10/(x+3)}$.

14.7. Вычислите $\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(1+\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{x-2}}\right]$. Укажите верный ответ:

☞ e^{5}; ☞ 1; ☞ e.

14.8. Вычислите предел и укажите верный ответ.

☞ e^{2}; ☞ e^{10}; ☞ $e^{1/5}$.

🕮 Подставьте $x = 2$.

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-5}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+4}{3x-2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x+1}-2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}2x)^{\operatorname{ctg}3x}$.

🕮 1. См. правило 5, формулу (2) (в числителе и знаменателе удобно вынести $2x$ и выделить второй замечательный предел в них отдельно).

2. См. правила 5 и 3.

3. См. правила 5 и 4.

Ответы: а) e^{4}; б) $e^{-8/7}$; в) $e^{2/3}$.

Задача 15

Вычислите $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\log_2(8x+1)-\log_2(x+2)\right]$.

15.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке предельного значения x:

☞ 0; ☞ неопределенность $[\infty-\infty]$; ☞ ∞.

🕮 $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_2 x=+\infty$.

15.2. Укажите, как избавиться от этой неопределенности:

☞ вынести x в максимальной степени;
☞ произвести замену переменной;
☞ преобразовать выражение, используя свойства логарифмов.

🕮 См. правило 6.

15.3. Укажите, что получится после преобразования:

☞ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_2(8x+1)}{\log_2(x+2)}$; ☞ $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_2\left(\dfrac{8x+1}{x+2}\right)$;

☞ $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_2(7x-1)$.

🕮 См. правило 6 (свойства логарифмов).

Теперь можно воспользоваться правилом 6 о пределе сложной функции: $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_2\left(\dfrac{8x+1}{x+2}\right)=\log_2\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x+1}{x+2}\right)$.

15.4. Вычислим: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x+1}{x+2}$. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $x=+\infty$:

☞ неопределенность $[\infty/\infty]$; ☞ 1/2; ☞ ∞.

🕮 См. правило 1.

15.5. Укажите, как избавиться от этой неопределенности:

☞ вынести в числителе и знаменателе в максимальной степени;
☞ числитель и знаменатель разделить на $(x + 2)$;
☞ выделить второй замечательный предел.

🕮 См. правило 1.

15.6. Выполните необходимые действия, упростите выражение. Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8+1}{1+2}$; ☞ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8+1/x}{1+2/x}$; ☞ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+1/x}{1+2/x}$.

15.7. Вычислите получившийся предел. Укажите верный ответ:

☞ 3; ☞ 1/2; ☞ 8.

🕮 См. правило 1.

15.8. Укажите окончательный ответ:

☞ 3; ☞ 1; ☞ 8.

Задача 16

Вычислите $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$. (Выведите формулу (1) правила 6.)

16.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $\alpha=0$:

☞ неопределенность [0/0]; ☞ ∞; ☞ 0.

🕮 $\log_a 1=0$.

16.2. Укажите, как избавиться от неопределенности в данном пределе:

☞ разделить числитель и знаменатель на α;
☞ вынести в числителе и знаменателе α в максимальной степени;

☞ преобразовать выражение, пользуясь свойствами логарифмов.

🕮 В данном выражении избавиться от неопределенности делением числителя и знаменателя на α, как предлагается в правиле 2, невозможно. См. правило 6.

16.3. Выполните необходимое преобразование. Укажите верный ответ:

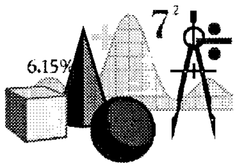
☞ $\lim\limits_{\alpha\to 0} \ln\dfrac{1+\alpha}{\alpha}$; ☞ $\lim\limits_{\alpha\to 0} \ln(1+\alpha)^{\alpha}$; ☞ $\lim\limits_{\alpha\to 0} \ln(1+\alpha)^{1/\alpha}$.

🕮 См. правило 6, свойства логарифмов.

16.4. Вычислите $\lim\limits_{\alpha\to 0} \ln(1+\alpha)^{1/\alpha}$. Укажите верный ответ:

☞ 0; ☞ 1; ☞ e.

🕮 См. правило 5, формулу (1); $\ln e = 1$.



Задача 17

Вычислите $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha}$. (Выведите формулу (3) правила 6).

17.1. Укажите, что получится при непосредственной подстановке $\alpha = 0$.

☞ ∞; ☞ 0; ☞ неопределенность [0/0].

🕮 См. свойства показательной функции.

17.2. Укажите, как можно избавиться от неопределенности в данном пределе:

☞ разделить числитель и знаменатель на α;
☞ выделить второй замечательный предел;
☞ преобразовать выражение, используя подходящую подстановку.

🕮 В данном выражении невозможно избавиться от неопределенности делением числителя и знаменателя на α (правило 2) и выделить второй замечательный предел также невозможно (см. правило 5).

17.3. Укажите, какая подстановка наиболее удобна для вычисления $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha}$:

☞ $e^{\alpha} = t,\ t \to 0$; ☞ $e^{\alpha} - 1 = t,\ t \to 0$;

☞ $e^{\alpha} = t,\ t \to 1$.

17.4. Преобразуйте выражение выбранным способом и укажите верный ответ.

☞ $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\ln(1+t)}$; ☞ $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{1+\ln t}$;

☞ $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\ln(t-1)}$.

🕮 Если $e^{a} = b$, то $a = \ln b$.

17.5. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $t = 0$:

☞ 0; ☞ ∞; ☞ неопределенность [0/0].

🕮 $\ln 1 = 0$.

17.6. Укажите, как избавиться от полученной неопределенности:

☞ преобразовать выражение, пользуясь свойствами логарифмов;

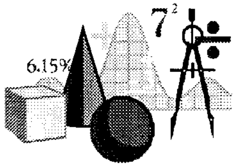
☞ воспользоваться готовым результатом (одной из формул);

☞ числитель и знаменатель разделить на t.

🕮 См. правило 6, формулу (1).

17.7. Получите окончательный ответ:

☞ 2; ☞ 1; ☞ 3.



Задача 18

Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{4x}-e^{-x})\ln(1-x)}{1-\cos 2x}$.

18.1. Укажите, что получится при подстановке непосредственно $x = 0$:

☞ 0; ☞ ∞; ☞ неопределенность [0/0].

18.2. Укажите, какие части этого выражения можно дополнить, чтобы применить формулы из правил 4, 5, 6:

☞ $(e^{4x}-e^{-x})$; $\ln(1-x)$ и $(1-\cos 2x)$;

☞ $\ln(1-x)$ и $(1-\cos 2x)$; ☞ $(1-\cos 2x)$.

🕮 См. правила 4, 5, 6.

18.3. Преобразуйте выражение $(e^{4x}-e^{-x})$ так, чтобы появилось выражение, предел которого известен. Укажите верный ответ:

☞ $\dfrac{(e^{4x}-e^{-x})}{4x}4x$; ☞ $\dfrac{e^{-x}(e^{5x}-1)}{x}x$;

☞ $\dfrac{e^{-x}(e^{5x}-1)}{5x}5x$.

🕮 См. правило 6, формулу (3).

18.4. Как следует преобразовать $\ln(1-x)$, чтобы можно было воспользоваться известным пределом:

☞ $\ln(1-x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}x$; ☞ $\ln(1-x)=\dfrac{\ln(1-x)}{-x}(-x)$;

☞ $\ln(1-x)=\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}(1-x)$.

🕮 См. правило 6, формулу (1).

18.5. Преобразуйте $(1-\cos 2x)$ так, чтобы можно было воспользоваться известным пределом. Укажите верный ответ:

☞ $1-\cos 2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2x}2x$;

☞ $1-\cos 2x=\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}x^2$;

☞ $1-\cos 2x=\dfrac{1-\cos 2x}{4x^2}4x^2$.

🕮 См. правило 4, формулу (5).

18.6. Упростите выражение и вычислите предел. Укажите верный ответ:

☞ – 5/2; ☞ – 5/4; ☞ – 5/8.

🕮 См. правило 4, формулу (5); правило 6, формулы (1) и (3).

Задачи для самостоятельной работы

Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_3(1+2x)}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x(3^{2x}-1)}{\mathrm{tg}2x\log_3(1-x)}$.

🕮 См. правила 4, 5 и 6.

Ответы: а) $2/\ln 3$; б) $\ln 3-\ln 2$; в) $-5\ln^2 3$.

Раздел II. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ-БЕРНУЛЛИ

Правило 7. Правило Лопиталя-Бернулли:

$$\lim_{x\to *}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\text{ или }\left(\frac{0}{0}\right)\right]=\lim_{x\to *}\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)},$$

т.е. предел отношения функций, стремящихся одновременно к бесконечности или к нулю (являющихся одновременно бесконечно большими или бесконечно малыми), равен пределу отношения их производных.

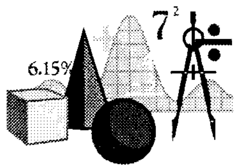
Правило 8. Если при вычислении $\lim\limits_{x\to *} f_1(x)f_2(x)$ получается неопределенность типа $[0\cdot\infty]$, то можно использовать правило Лопиталя, преобразовав предварительно выражение следующим образом:

$$\lim_{x\to *} f_1(x)f_2(x)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to *}\frac{f_1(x)}{f_2^{-1}(x)}\quad\text{или}\quad\lim_{x\to *}\frac{f_2(x)}{f_1^{-1}(x)}.$$

Правило 9. Если при вычислении $\lim\limits_{x\to *}[f_1(x)]^{f_2(x)}$ получается неопределенность одного из следующих типов $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$, то можно использовать правило Лопиталя, преобразовав предварительно выражение следующим образом:

$$\lim_{x\to *}[f_1(x)]^{f_2(x)}=e^{\ln\lim\limits_{x\to *}[f_1(x)]^{f_2(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to *} f_2(x)\cdot\ln f_1(x)},$$

где $\lim\limits_{x\to *} f_2(x)\cdot\ln f_1(x)$ вычисляется по правилам 7, 8. В некоторых случаях полезно комбинировать правило Лопиталя–Бернулли с элементарными тождественными преобразованиями, рассмотренными в разд. I.



Задача 19

Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$.

19.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $x=\infty$:

☞ 0; ☞ ∞; ☞ неопределенность $[\infty/\infty]$.

🕮 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=\infty$.

19.2. Можно ли избавиться от неопределенности, используя тождественные преобразования выражения $\ln(x/x^2)$? Укажите верный ответ:

☞ можно, если в числителе и знаменателе вынести x в максимальной степени;
☞ можно, если использовать свойства логарифмических функций;
☞ нельзя.

🕮 См. правила 1 и 6.

19.3. Можно ли к данному пределу применить правило Лопиталя? Укажите верный ответ:

☞ можно; ☞ нельзя.

🕮 См. правило 7.

19.4. Преобразуйте данный предел, используя правило Лопиталя, упростите результат. Укажите верный ответ:

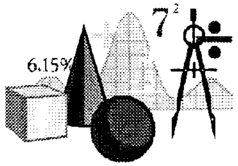
☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$; ☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^2}$; ☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2}$.

🕮 См. правило 7.

19.5. Вычислите получившийся предел. Укажите верный ответ:

☞ 0; ☞ ∞; ☞ [1/2].

🕮 См. правило 2.



Задача 20

Вычислите $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-x^2-4x+3}$.

20.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $x = 1$:

☞ 0; ☞ ∞; ☞ неопределенность [0/0]

20.2. Укажите, можно или нельзя при вычислении предела $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-x^2-4x+3}$ применить правило Лопиталя:

☞ можно; ☞ нельзя.

🕮 См. правило 7.

20.3. Преобразуйте выражение согласно правилу Лопиталя. Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x^4+4x^3-6x^2+20x-1}{(2x^3-x^2-4x+3)^2}$; ☞ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{6x^2-2x-4}$;

☞ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-1}{6x^2-2x-1}$.

🕮 См. правило 7.

20.4. Укажите, что получается при подстановке $x = 1$ в новое выражение:

☞ неопределенность [0/0]; ☞ 0; ☞ ∞.

20.5. Укажите, можно ли к новому пределу еще раз применить правило Лопиталя:

☞ нельзя;
☞ можно.

🕮 См. правило 7.

20.6. Преобразуйте получившийся предел еще раз, применив правило Лопиталя. Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{12x-2}$; ☞ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x-3}{12x-6}$;

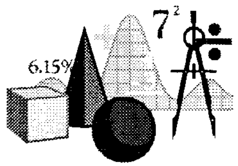
☞ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-3(x-1)^2}{2(3x^2-x-2)^2}$.

🕮 См. правило 7.

20.7. Вычислите получившийся предел. Укажите верный ответ:

☞ 0; ☞ 1/10; ☞ 3/5.

🕮 Подставьте $x = 1$.



Задача 21

Вычислите $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x$.

21.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $x = 0$:

☞ неопределенность $[0\cdot\infty]$; ☞ 0; ☞ ∞.

🕮 $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$.

21.2. Укажите, можно ли избавиться от неопределенности в этом пределе, используя тождественные преобразования:

☞ можно, если использовать свойства логарифмов;
☞ можно, выделив известный предел:

$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{\ln(1+(x-1))}{x-1}(x-1);$$

☞ нельзя.

🕮 См. свойства логарифмов и правило 6.

21.3. Укажите, можно или нельзя к данному пределу, не преобразовывая его, применить правило Лопиталя:

☞ можно;

☞ нельзя, выражение $x^2 \ln x$ необходимо преобразовать.

🕮 См. правила 7, 8.

21.4. Преобразуйте $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x$ так, чтобы применение правила Лопиталя стало возможным. Укажите верный ответ:

$$☞ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln^{-1} x}; \quad ☞ \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-2}}; \quad ☞ \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-1/2}}.$$

🕮 См. правила 7 и 8.

21.5. Примените к полученному пределу правило Лопиталя, упростите результат и укажите верный ответ:

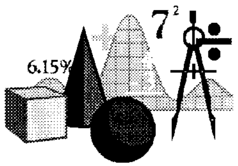
$$☞ \lim_{x\to 0}(-x^2/2); \quad ☞ \lim_{x\to 0}[x(1+2\ln x)]; \quad ☞ \lim_{x\to 0}(-2/x^2).$$

🕮 См. правило 7.

21.6. Вычислите получившийся предел и укажите верный ответ:

☞ $-1/2$; ☞ 0; ☞ ∞.

🕮 Подставьте $x = 0$.



Задача 22

Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{-x}$.

22.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $[\infty \cdot 0]$:

☞ неопределенность $[\infty \cdot 0]$; ☞ ∞; ☞ 0.

🕮 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \left[e^{-\infty}\right] = 0.$

22.2. Укажите, можно ли избавиться от неопределенности в данном пределе без использования правила Лопиталя:

☞ можно, выделив известный предел:

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left[\frac{(e^{-x}-1)+1}{-x}(-x)\right];$$

☞ нельзя.

🕮 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x}-1}{-x}$ не является известным пределом (см. правило 6).

22.3. Укажите, можно ли использовать правило Лопиталя в данном пределе непосредственно:

☞ можно;

☞ непосредственно нельзя, требуется преобразовать выражение $x^2 e^{-x}$.

🕮 См. правила 7, 8.

22.4. Укажите наиболее рациональное преобразование выражения $x^2 e^{-x}$ для того, чтобы можно было использовать правило Лопиталя для вычисления $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{-x}$.

$$☞ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]; \qquad ☞ \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{x^{-2}} = \left[\frac{0}{0}\right];$$

$$☞ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{0}\right].$$

🕮 См. правила 7 и 8.

22.5. Примените к полученному пределу правило Лопиталя, упростите результат. Укажите верный ответ:

$$☞ \lim_{x\to\infty}\frac{2x-x^2}{e^x}; \quad ☞ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}; \quad ☞ \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}.$$

🕮 См. правило 7 и правила дифференцирования.

22.6. Укажите, что получается при подстановке $x = \infty$ в новое выражение:

☞ неопределенность $[\infty/\infty]$; ☞ ∞; ☞ 0.

🕮 $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty.$

22.7. Укажите, как можно избавиться от неопределенности:

- ☞ вынести в числителе и знаменателе x в максимальной степени;
- ☞ свести данный предел к одному из известных —

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x};$$

- ☞ применить правило Лопиталя.

🕮 См. правила 1, 6 и 7.

22.8. Примените к $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x/e^x\right)$ правило Лопиталя. Укажите верный ответ:

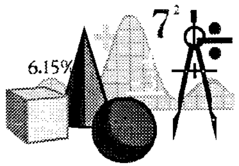
☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-2x}{e^x}$; ☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}$; ☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$.

🕮 См. правило 7.

22.9. Вычислите получившийся предел. Укажите верный ответ:

☞ 0; ☞ ∞; ☞ 2.

🕮 Подставьте $x=\infty$.



Задача 23

Вычислите $\lim\limits_{x\to\pi}\operatorname{tg}(x/4)^{\operatorname{ctg}x}$.

23.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $x=\pi$:

☞ 1; ☞ ∞; ☞ неопределенность $[1^\infty]$.

🕮 См. правило 5; $\lim\limits_{x\to\pi}\operatorname{ctg}x=-\infty$; $\operatorname{tg}(\pi/4)=1$.

23.2. Укажите, можно ли для вычисления данного предела использовать правило Лопиталя и надо ли предварительно преобразовать $\operatorname{tg}(x/4)^{\operatorname{ctg}x}$:

- ☞ нельзя;
- ☞ можно, непосредственно применяя правило к данному пределу;
- ☞ можно, но после предварительного преобразования выражения.

🕮 См. правило 9.

23.3. Преобразуйте данный предел так, чтобы можно было использовать правило Лопиталя. Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\ln\operatorname{tg}(x/4)}{\operatorname{tg}x}$; ☞ $e^{\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\ln\operatorname{tg}(x/4)}{\operatorname{tg}x}}$;

☞ $e^{\lim\limits_{x\to\pi}\left[\operatorname{ctg}x\cdot\ln\operatorname{tg}(x/4)\right]}$.

🕮 См. правило 9, 7, 8. Учтите, что $\operatorname{ctg}x=1/\operatorname{tg}x$.

23.4. Обозначим $A=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\ln\operatorname{tg}(x/4)}{\operatorname{tg}x}=[0/0]$. Укажите, можно или нельзя вычислить A по правилу Лопиталя:

- ☞ по правилу Лопиталя A вычислить нельзя;
- ☞ $A=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos^2 x}{2\sin(x/2)}$;
- ☞ $A=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos^2 x}{\operatorname{tg}(x/4)}$.

🕮 См. правило 7 и аккуратно дифференцируйте.

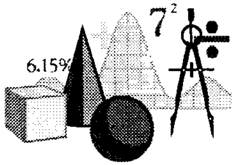
23.5. Вычислите А. Укажите верный ответ:

☞ 1/2; ☞ – 1/2; ☞ 0.

🕮 Подставьте $x=\pi$.

23.6. Получите окончательный ответ:

☞ 1; ☞ $\sqrt{e}$; ☞ e^{-1}.



Задача 24

Вычислите $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}x)^{1/\log_3 x}$.

24.1. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $x = 0$:

☞ ∞; ☞ 1; ☞ неопределенность $[\infty^0]$.

🕮 $\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{ctg}x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+0}\log_3 x=-\infty$.

24.2. Укажите, каким способом можно избавиться от неопределенности в данном пределе:
- ☞ преобразовать предел ко второму замечательному пределу;
- ☞ применить непосредственно к пределу правило Лопиталя;
- ☞ преобразовать данный предел так, чтобы стало возможным применение правила Лопиталя.

🕮 См. правила 5, 7 и 9.

24.3. Преобразуйте $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}x)^{1/\log_3 x}$. Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\operatorname{ctg}x}{\log_3 x}$; ☞ $e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\operatorname{ctg}x}{\log_3 x}}$; ☞ $e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\operatorname{ctg}x}{\log_3 x}}$.

🕮 См. правило 9.

24.4. Преобразуйте $A=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\operatorname{ctg}x}{\log_3 x}$, применив правило Лопиталя, упростите результат и укажите верный ответ:

☞ $A=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{-x\ln 3}{\cos x\sin x}$; ☞ $A=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{-x}{\cos x\sin x\ln 3}$; ☞ $A=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x\ln 3}{\operatorname{ctg}x}$.

🕮 См. правило 7.

24.5. Укажите, что получается при непосредственной подстановке $x = 0$ в выражение для A:

☞ 0; ☞ ∞; ☞ неопределенность [0/0].

🕮 $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.

24.6. Укажите, какой способ избавления от неопределенности в получившемся пределе является наиболее рациональным:
- ☞ выделение первого замечательного предела;
- ☞ использование правила Лопиталя.

🕮 См. правило 4.

24.7. Преобразуйте A, используя первый замечательный предел. Укажите верный ответ:

☞ $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln 3}{\sin x}$; ☞ $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\ln 3}{\cos x}$;

☞ $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{\cos x}$.

🕮 См. правило 4.

24.8. Вычислите A. Укажите верный ответ:

☞ $A=-\ln 3$; ☞ $A=-\infty$; ☞ $A=1/\ln 3$.

🕮 Подставьте $x = 0$.

24.9. Получите окончательный ответ:

☞ 1; ☞ 1/3; ☞ e.

Задачи для самостоятельной работы

Вычислите следующие пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5}{e^{2x}}$. 🕮 См. правило 7.

б) $\lim\limits_{x\to+0}(\arcsin x\cdot\operatorname{ctg}x)$. 🕮 См. правило 8.

в) $\lim\limits_{x\to0}(\sqrt[3]{x}\cdot\ln x)$. 🕮 См. правило 8.

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot e^{1/x}\right)$. 🕮 См. правило 8.

д) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{1/(x-2\pi)^2}$. 🕮 См. правило 9.

е) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x)^{\sin x}$. 🕮 См. правило 9.

ж) $\lim\limits_{x\to +0} x^{3/(4+2\ln x)}$. 🕮 См. правило 9.

Ответы: а) 0; б) 1; в) 0; г) ∞; д) $1/\sqrt{e}$; е) 1; ж) $e^{3/2}$.

ОТВЕТЫ

1.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\pi/x}{x^2-4x+4}=\left[\dfrac{1}{0}\right]$.

1.2. При непосредственной подстановке $x = 2$ в выражение $\dfrac{\sin(\pi/x)}{x^2-4x+4}$ ответ можно дать сразу.

1.3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(\pi/x)}{x^2-4x+4}=\infty$, т.е. предел не существует.

2.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{4x^4+5}}=[\infty/\infty]$.

2.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{4x^4+5}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ — неопределенность.

2.3. Необходимо вынести x в максимальной степени в числителе и знаменателе дроби $\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{4x^4+5}}$.

2.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+4/x+1/x^2}{\sqrt{4+5/x^4}}$.

2.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{4x^4+5}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+4/x+1/x^2}{\sqrt{4+5/x^4}}=\dfrac{3}{2}$.

3.1. Получили: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-x^2-x+1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

3.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-x^2-x+1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ — неопределенность.

3.3. Для раскрытия неопределенности в $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-x^2-x+1}$ необходимо многочлены, стоящие в числителе и знаменателе, разделить на $(x-1)$.

3.4. (x^2-4x+3).

3.5. $(x^2-1) \Rightarrow \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-x^2-x+1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ — неопределенность.

3.7. Чтобы избавиться от неопределенности в $\lim\limits_{x\to1}\left[(x^2-4x+3)/(x^2-1)\right]$, разделим числитель и знаменатель на $(x-1)$.

3.8. $\lim\limits_{x\to1}\left[(x^2-4x+3)/(x^2-1)\right]=\lim\limits_{x\to1}\left[(x-3)/(x+1)\right]$.

3.9. Используя правило 2 окончательно имеем:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-x^2-x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-3}{x+1}=\left[\frac{-2}{2}\right]=-1.$$

4.1. $\lim\limits_{x\to3}\left[(\sqrt[4]{x-2}-1)/(\sqrt[6]{x-2}-1)\right]=[0/0]$.

4.2. Чтобы избавиться от неопределенности [0/0] в $\lim\limits_{x\to3}\left[(\sqrt[4]{x-2}-1)/(\sqrt[6]{x-2}-1)\right]$, необходимо прежде избавиться от радикалов $\sqrt[4]{x-2}$ и $\sqrt[6]{x-2}$.

4.3. Чтобы избавиться от обоих радикалов в $\lim\limits_{x\to3}\left[(\sqrt[4]{x-2}-1)/(\sqrt[6]{x-2}-1)\right]$, нужна подстановка $x-2=t^{12}$.

4.4. $\lim\limits_{t\to1}\left[(t^3-1)/(t^2-1)\right]$.

4.5. $\lim\limits_{t\to1}\left[(t^3-1)/(t^2-1)\right]$=[0/0].

4.6. Необходимо в $\lim\limits_{t\to1}\left[(t^3-1)/(t^2-1)\right]$ числитель и знаменатель разделить на $(t-1)$.

4.7. После упрощения

$$\lim_{t\to1}\left[(t^3-1)/(t^2-1)\right]=\lim_{t\to1}\left[(t^2+t+1)/(t+1)\right].$$

4.8. $\lim\limits_{t\to1}\dfrac{\sqrt[4]{x-2}-1}{\sqrt[6]{x-2}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t^3-1}{t^2-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t^2+t+1}{t+1}=\dfrac{3}{2}$.

5.1. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x-3}}{x-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

5.2. Чтобы избавиться от неопределенности в $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x-3}}{x-3}$, необходимо прежде избавиться от корней $\sqrt{2x+3}$ и $\sqrt{4x-3}$.

5.3. В $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x-3}}{x-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ необходимо дополнить числитель до разности квадратов.

5.4. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{4x-3}}$.

5.5. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x-3}}{x-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{4x-3})}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{4x-3}}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}.$$

6.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-4x+1}\right)=[\infty,-\infty]$.

6.2. Чтобы избавиться от неопределенности, необходимо прежде избавиться от обоих корней.

6.3. Чтобы избавиться от корней, входящих в неопределенность, надо подпредельное выражение дополнить до разности квадратов.

6.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-4x+1}}$.

6.5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-4x+1}}=\left[\dfrac{-\infty}{\infty}\right]$.

6.6. При вычислении $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-4x+1}}$, следует вынести в числителе и знаменателе x в максимальной степени.

6.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x}{x\left(\sqrt{1+1/x+1/x^2}+\sqrt{1-4/x+1/x^2}\right)}$.

6.8. Окончательно имеем:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-4x+1}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-4x+1}}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\left[-\frac{5}{2}\right]=-\frac{5}{2}.$$

7.1. $\lim\limits_{x\to0}(\sin 7x/x)=[0/0]$.

7.2. Для раскрытия неопределенности в $\lim\limits_{x\to0}(\sin 7x/x)=[0/0]$ необходимо использовать первый замечательный предел.

7.3. Предел $\lim\limits_{x\to0}(\sin 7x/x)$ не является первым замечательным пределом.

7.4. Преобразовали выражение $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 7x}{7x}\cdot\dfrac{7}{1}\right)$, выделив первый замечательный предел с $\alpha=(7x)\to0$.

7.5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 7x}{7x}\cdot\dfrac{7}{1}\right)=1\cdot7=7.$

8.1. $\lim\limits_{\alpha\to0}\left[(1-\cos\alpha)/\alpha^2\right]=[0/0]$.

8.2. В $\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ надо выделить первый замечательный предел. Это можно сделать, например, так:

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\alpha^2(1+\cos\alpha)}.$$

8.3. $\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$.

8.4. $\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}=\dfrac{1}{2}$.

9.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2(1-\cos(1/x))\right]=[\infty\cdot0]$ — неопределенность.

9.2. Чтобы избавиться от неопределенности в $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2(1-\cos(1/x))\right]$, необходимо выделить первый замечательный предел или одно из его следствий (формулы 2–5, правило 4).

9.3. Сравним $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2(1-\cos(1-x))\right]$ с

$$\lim_{\alpha\to0}\left[(1-\cos\alpha)/\alpha^2\right]=1/2.$$

9.4. В $x^2(1-\cos(1/x))$ роль $\alpha\to0$ при $x\to\infty$ играет $1/x$.

9.5. После преобразования получили $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos(1/x)}{(1/x)^2}$.

9.6. $$\lim_{x\to\infty}\left[x^2(1-\cos(1/x))\right]=[\infty\cdot0]=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos(1/x)}{(1/x)^2}=$$

$$=[1/x=\alpha\to0]=1/2.$$

10.1. $\lim\limits_{x\to1}\left[(1-x)\operatorname{tg}(\pi x/2)\right]=[0\cdot\infty]$.

10.2. Чтобы избавиться от неопределенности в $\lim\limits_{x\to1}\left[(1-x)\operatorname{tg}(\pi x/2)\right]$, необходимо выделить первый замечательный предел или одно из его следствий. Так как $x\to1$, предварительно произведем замену переменной с тем, чтобы новая переменная стремилась к нулю.

10.3. Чтобы новая переменная $t \to 0$, необходима замена: $x = 1 + t$.

10.4. $\lim\limits_{t\to 0}(t \operatorname{ctg} \pi t/2)$.

10.5. Преобразованный предел:

$$\lim_{t\to 0}(t \operatorname{ctg} \pi t/2) = \lim_{t\to 0} \frac{\pi t/2}{\sin(\pi t/2)} \cdot \frac{\cos(\pi t/2)}{\pi/2}.$$

10.6. $\lim\limits_{t\to 1}\left[(1-x)\operatorname{tg}(\pi x/2)\right] = [0\cdot\infty] = \left[\begin{matrix} x = 1+t \\ t \to 0 \end{matrix}\right] =$

$$= \lim_{t\to 0}(t \operatorname{ctg} \pi t/2) = \lim_{t\to 0} \frac{\pi t/2}{\sin(\pi t/2)} \frac{\cos(\pi t/2)}{\pi/2} = 1 \cdot \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

11.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x = \left[\frac{2}{3}\right]^0$.

11.2. Ответ при вычислении $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x = \left[\frac{2}{3}\right]^0$ можно получить сразу.

11.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x = \left[\frac{2}{3}\right]^0 = 1.$

12.1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{2/x} = [1^\infty]$.

12.2. Результат $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{2/x} = [1^\infty]$ является неопределенностью.

12.3. Неопределенность $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{2/x} = [1^\infty]$ следует свести ко второму замечательному пределу.

12.4. При сравнении $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{2/x} = [1^\infty]$ со вторым замечательным пределом видим, что при $x \to 0$ $\alpha = \sin 2x \to 0$.

12.5. $\lim\limits_{x\to 0}\left((1+\sin 2x)^{1/\sin 2x}\right)^{\sin 2x \cdot 2/x}$.

12.6. $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin 2x)^{1/\sin 2x}\right]^{\sin 2x\cdot 2/x} = e^{2\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x/x)} = e^{2A}$.

12.7. $A = \lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x/x) = 2$.

12.8. Окончательно имеем: $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{2/x} = e^{2A} = e^4$.

13.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{2x} = \left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty\right]$.

13.2. Необходимо предварительно избавиться от неопределенности в $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+3)/x\right] = [\infty/\infty]$.

13.3. Чтобы избавиться от неопределенности при вычислении $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+3)/x\right] = [\infty/\infty]$, необходимо в числителе и знаменателе вынести x в максимальной степени.

13.4. Получили новую форму неопределенности:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x} = [1^\infty].$$

13.5. При вычислении $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^{2x} = [1^\infty]$ необходимо использовать второй замечательный предел.

13.6. В данном пределе $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^{2x}$ роль $\alpha \to 0$ играет $3/x$.

13.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+3/x)^{x/3}\right]^6$.

13.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^{2x} = [1^\infty] =$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty \\ \alpha = 3/x \to 0}}\left((1+3/x)^{x/3}\right)^6 = e^6, \text{ так как } (\infty/\infty)^\infty.$$

14.1. Неопределенность $[1^\infty]$.

14.2. При вычислении $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^{10/(x-2)} = [1^\infty]$ необходимо выделить в данном выражении второй замечательный предел.

14.3. Для выделения второго замечательного предела необходимо использовать формулу (1) из правила 5:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e.$$

14.4. После преобразования получим:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^{10/(x-2)}=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{x-2}{x+3}\right)^{10/(x-2)}.$$

14.5. В $\lim\limits_{x\to 2}\left(1+\frac{x-2}{x+3}\right)^{10/(x-2)}$ при $x\to 2$ $\alpha=\frac{x-2}{x+3}\to 0.$

14.6. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^{\frac{10}{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(1+\frac{x-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{x-2}}\right]^{10/(x+3)}$, где

$\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(1+\frac{x-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{x-2}}\right]$ — второй замечательный предел.

14.7. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(1+\frac{x-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{x-2}}\right]=e$, так как это второй замечательный предел с

$$\alpha=\frac{x-2}{x+3}\to 0\Rightarrow\lim_{x\to 2}\left[\left(1+\frac{x-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{x-2}}\right]^{10/(x+3)}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{10}{x+3}}.$$

14.8. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^{10/(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(1+\frac{x-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{x-2}}\right]^{10/(x+3)}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{10}{x+3}}=e^{10/5}=e^2.$

15.1. Неопределенность:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log_2(8x+1)-\log_2(x+2)\right]=[\infty-\infty].$$

15.2. Для устранения неопределенности необходимо предварительно преобразовать выражение

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log_2(8x+1)-\log_2(x+2)\right]=[\infty-\infty].$$

15.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_2\left(\frac{8x+1}{x+2}\right).$

15.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8x+1}{x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$

15.5. Чтобы избавиться от неопределенности при вычислении $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8x+1}{x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, необходимо в числителе и знаменателе вынести x в максимальной степени.

15.6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8+1/x}{1+2/x}.$

15.7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8+1/x}{1+2/x}=8.$

15.8. Окончательно имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log_2(8x+1)-\log_2(x+2)\right]=[\infty,-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\log_2\left(\frac{8x+1}{x+2}\right)=\log_2\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{8x+1}{x+2}\right)=$$

$$=\log_2\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{8+1/x}{1+2/x}\right)=\log_2 8=\log_2 2^3=3.$$

16.1. Получили неопределенность $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=\left[\frac{0}{0}\right].$

16.2. Для вычисления $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$ необходимо преобразовать выражение так, чтобы можно было воспользоваться правилом 6: $\lim\limits_{x\to *}\ln f(x)=\ln\left[\lim\limits_{x\to *}f(x)\right].$

16.3. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\left[\ln(1+\alpha)^{1/\alpha}\right].$ Теперь можно воспользоваться свойством предела сложной функции:

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\ln(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]=\ln\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right].$$

16.4. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1$. Выведена формула (1) gравила 6, ею можно пользоваться как следствием второго замечательного предела.

17.1. Неопределенность $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

17.2. Поскольку данное выражение не подходит ни под одно из предложенных правил из-за наличия показательной функции e^{α}, необходимо преобразовать выражение так, чтобы эта функция исчезла, т.е. подобрать подходящую подстановку.

17.3. Наиболее подходящей подстановкой для вычисления $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha}$ является $e^{\alpha}-1=t\to 0$.

17.4. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}$.

17.5. Неопределенность $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

17.6. Для вычисления $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}$ можно воспользоваться известным пределом $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1$.

17.7. Окончательно получаем:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{c}e^{\alpha}-1=t\\ \alpha=\ln(1+t)\\ t\to 0\end{array}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\frac{1}{1}=1,$$

т.е. выведена формула (3) правила 6.

18.1. При $x=0$ получится неопределенность:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{4x}-e^{-x})\ln(1-x)}{1-\cos 2x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

18.2. До известных пределов в данном выражении можно дополнить $(e^{4x}-e^{-x})$; $\ln(1-x)$ и $(1-\cos 2x)$.

18.3. $e^{-x}\dfrac{e^{5x}-1}{5x}5x$, где $\alpha=5x\to 0$.

18.4. $\ln(1-x)=\dfrac{\ln(1-x)}{-x}(-x)$, где $\alpha=-x\to 0$.

18.5. $1-\cos 2x=\dfrac{1-\cos 2x}{4x^2}4x^2$, при $\alpha=2x\to 0$ можно воспользоваться известным пределом. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{4x}-e^{-x})\ln(1-x)}{1-\cos 2x}=$$

$$=\lim\left(e^{-x}\frac{e^{5x}-1}{5x}5x\frac{\ln(1-x)}{(-x)}(-x)\right)\Big/\left(\frac{1-\cos 2x}{4x^2}4x^2\right).$$

18.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{4x}-e^{-x})\ln(1-x)}{1-\cos 2x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}\dfrac{e^{5x}-1}{5x}5x\dfrac{\ln(1-x)}{(-x)}(-x)}{\dfrac{1-\cos 2x}{4x^2}4x^2}=\frac{1\cdot 1\cdot 5\cdot 1\cdot(-1)}{1/2\cdot 4}=-\frac{5}{2}.$$

19.1. Неопределенность $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

19.2. Никакие тождественные преобразования не позволят избавиться от неопределенности при вычислении

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

19.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ можно, только применив правило Лопиталя.

19.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^2}$.

19.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$.

20.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-x^2-4x+3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

20.2. Можно применить правило Лопиталя.

20.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^3-3x+2)'}{(2x^3-x^2-4x+3)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{6x^2-2x-4}.$

20.4. Неопределенность $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{6x^2-2x-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

20.5. К новому пределу $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{6x^2-2x-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ можно еще раз применить правило Лопиталя.

20.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(3x^2-3)'}{(6x^2-2x-4)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{12x-2}.$

20.7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-x^2-4x+3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{6x^2-2x-4}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{12x-2}=\dfrac{3}{5}.$

21.1. Неопределенность $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x=[0\cdot\infty].$

21.2. Никакие тождественные преобразования не позволяют избавиться от неопределенности при вычислении $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x.$

21.3. Без преобразования выражения $x^2\ln x$ правило Лопиталя к данному пределу нельзя применить.

21.4. Единственным рациональным преобразованием для возможности использования правила Лопиталя является следующее:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\ln x/x^{-2}\right).$$

21.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x^{-2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2/2\right)$ — согласно правилу Лопиталя.

21.6. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x^{-2}}=[0/0]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(x^{-2}\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}(-x^2/2)=0.$

22.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2e^{-x}\right)=[\infty\cdot 0].$

22.2. Избавиться от неопределенности в $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2e^{-x}\right)$ без использования правила Лопиталя нельзя.

22.3. Правило Лопиталя можно будет применить только после преобразования выражения x^2e^{-x}.

22.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2e^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}.$

22.5. Согласно правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^x}.$

22.6. Неопределенность $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x/e^x\right)=[\infty/\infty].$

22.7. Избавиться от неопределенности при вычислении $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ можно, только применив правило Лопиталя.

22.8. Согласно правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x}.$

22.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2e^{-x}\right)=[\infty\cdot 0]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2/e^x\right)=[\infty/\infty]=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x/e^x\right)=[\infty/\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2/e^x\right)=[2/\infty]=0.$

23.1. При $x=\pi$ получаем неопределенность

$\lim\limits_{x\to\pi}\operatorname{tg}(x/4)^{\operatorname{ctg}x}=[1^\infty].$

23.2. Можно, но только предварительно преобразовав это выражение.

23.3. $\lim\limits_{x\to\pi}\operatorname{tg}(x/4)^{\operatorname{ctg}x}=e^{\lim\limits_{x\to\pi}\operatorname{ctg}x\cdot\ln\operatorname{tg}(x/4)}=e^{\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\ln\operatorname{tg}(x/4)}{\operatorname{tg}x}}=e^{[0/0]}.$

23.4. $A=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x/4}{\operatorname{tg}x}=[0/0]$ вычислим, используя правило Лопиталя:

$$A=\lim_{x\to\pi}\frac{\ln\operatorname{tg}x/4}{\operatorname{tg}x}.$$

После упрощения получим: $A=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos^2 x}{2\sin(x/2)}.$

23.5. $A=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos^2 x}{2\sin(x/2)}=\dfrac{1}{2}$;

23.6. $\lim\limits_{x\to\pi}\operatorname{tg}(x/4)^{\operatorname{ctg}x}=\left[1^{\infty}\right]=e^{\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\ln\operatorname{tg}(x/4)}{\operatorname{tg}x}}=e^A=e^{1/2}=\sqrt{e}$.

24.1. Неопределенность $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}x)^{1/\log_3 x}=\left[\infty^0\right]$.

24.2. Чтобы избавиться от неопределенности при вычислении $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}x)^{1/\log_3 x}$, надо предварительно преобразовать $(\operatorname{ctg}x)^{1/\log_3 x}$, чтобы стало возможным применение правила Лопиталя.

24.3. $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}x)^{1/\log_3 x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\operatorname{ctg}(x)}{\log_3 x}}=e^{[\infty/\infty]}=e^A$.

24.4. $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x\ln3}{\cos x\sin x}$.

24.5. $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x\ln3}{\cos x\sin x}=[0/0]$.

24.6. При вычислении $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x\ln3}{\cos x\sin x}$ наиболее рационально воспользоваться первым замечательным пределом.

24.7. $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\ln3\cdot x}{\cos x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\ln3}{\cos x}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\ln3}{\cos x}$.

24.8. $A=-\ln3$.

24.9. $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}x)^{1/\log_3 x}=\left[\infty^0\right]=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\operatorname{ctg}x}{\log_3 x}}=e^A=$

$=e^{-\ln3}=e^{\ln1/3}=1/3$.

ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Необходимые сведения

Определение 1. Если $y=f(x)$ и Δx — приращение независимой переменной x, то $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ — приращение функции y.

Определение 2. Выражение $y'=\dfrac{dy}{dx}=f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если оно имеет смысл, называется производной функции $y=f(x)$.

Определение 3. Производной второго порядка от функции $y=f(x)$ называется производная от ее первой производной:

$$y''=\left(y'(x)\right)' \quad \text{или} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Определение 4. Производной n-го порядка от функции $y=f(x)$ называется производная от производной ($n-1$)-го порядка этой функции:

$$y^n=\left(y^{n-1}(x)\right)' \quad \text{или} \quad \frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),\ n=2,3,\ldots$$

Правило 1. *Основные правила нахождения производной.*

Если c — постоянная величина, а функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные, то:

1.1. $c'=0$.

1.2. $(u\pm v)'=u'\pm v'$.

1.3. $(uv)'=u'v+uv'$.

1.4. $(cv)'=cv'$ (константу можно выносить за знак производной).

1.5. $(u/v)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

1.6. $(c/v)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$.

Правило 2. *Основные формулы дифференцирования.*

Если $y = f(u)$, где u — независимая переменная, то:

2.1. $(u^n)' = nu^{n-1}$, $n - \text{const}$.

2.2. $(e^u)' = e^u$.

2.3. $(a^u)' = a^u \ln a$.

2.4. $(\ln u)' = 1/u$.

2.5. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a}$.

2.6. $(\sin u)' = \cos u$.

2.7. $(\cos u)' = -\sin u$.

2.8. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}$.

2.9. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}$.

2.10. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

2.11. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

2.12. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2}$.

2.13. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}$

Правило 3. *Дифференцирование сложной функции.*

Если задана сложная функция $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то ее производная $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = f'(u)\varphi'(x)$ или $y'_x = y'_u u'_x$.

Правило 4. *Дифференцирование функции, заданной в неявном виде.*

4.1. Если дифференцируемая функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению $F(x, y) = 0$, то производная $y' = y'(x)$ этой неявной функции может быть найдена из уравнения $\dfrac{d}{dx}\left[F(x, y)\right] = 0$, где $F[x, y(x)]$ дифференцируется как сложная функция переменной x.

4.2 Производная второго порядка может быть вычислена двумя способами:

а) найденную $y' = \varphi(x, y(x))$ продифференцировать еще раз, помня, что $y = y(x)$ т. е. $y'' = \dfrac{d}{dx}\left[\varphi(x, y(x))\right]$;

б) результат первого дифференцирования уравнения $F(x, y) = 0$ вновь подвергнуть такому же действию, т. е.

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0 \Rightarrow \Phi(x, y, y') = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\Phi(x, y(x), y'(x))\right] = 0,$$

и из последнего уравнения, подставив в него уже найденную производную $y'(x)$, выразить искомую $y''(x)$. (Аналогично вычисляются производные более высокого порядка.)

Правило 5. *Дифференцирование показательно-степенной функ-ции* $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые функции.

Для нахождения производной функции $y = u^v$, необходимо предварительно ее прологарифмировать: $\ln y = v \ln u$.

Затем, используя правило 4, вычислить искомую производную.

Основные свойства логарифмов:

$$\ln(AB) = \ln A + \ln B,\ \ln(A/B) = \ln A - \ln B,\ \ln A^k = k \ln A.$$

Выражение $(\ln y)' = y'/y$, где $y = y(x)$, называется *логарифмической производной.*

Правило 6. *Дифференцирование функции, заданной параметрически.*

6.1. Система уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},\ t \in (\alpha, \beta),$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — дифференцируемые функции и $\varphi'(t) \neq 0$, определяет в некоторой области параметрически заданную функцию $y = y(x)$, причем $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

6.2. Для вычисления производной второго порядка $y''_{xx} = d^2y/dx^2$ можно поступить двояко:

а) вычислив y'_x, имеем новую систему

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y'_x = y'_x(t) \end{cases}.$$

Отсюда вторую производную вычисляем по той же формуле, что и первую производную, вместо y подставляя в нее y'_x, т. е.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \Rightarrow y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t},$$

(подобным образом можно вычислить и производные более высоких порядков);

б) производные второго порядка вычисляем по формуле

$$y''_{xx} = \left(y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}\right)/\left(x'_t\right)^3,$$

которая получена из $y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_t / x'_t$ после подстановки $y'_x = y'_t/x'_t$.

Для вычисления производных 2-го и более высоких порядков, в данном пособии используются только правило 6.2, а.

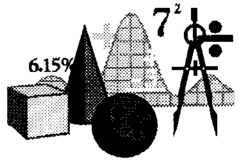
Правило 7. *Геометрический смысл производной.*

Если построить график функции $y = f(x)$ и провести касательную к нему в точке $M_0(x_0, y_0)$, то $y'(M_0) = f'(x_0)$ представляет собой угловой коэффициент этой касательной, т.е. $y'(M_0) = \mathrm{tg}\varphi_{\text{кас.}} = k_{\text{кас.}}$. Уравнение любой прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Угловой коэффициент нормали (прямой, проходящей через точку касания перпендикулярно касательной)

$$k_{\text{норм.}} = -1/k_{\text{кас.}}.$$



Задача 1

Пользуясь определением производной, вычислите производную функции $y = \sqrt{x}$.

1.1. Укажите, чему равно приращение функции Δy, если Δx — приращение независимой переменной:

☞ $\Delta y = \sqrt{\Delta x}$; ☞ $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$; ☞ $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$.

🕮 См. определение 1, где $f(x) = \sqrt{x}$

1.2. Укажите, как, пользуясь определением производной, следует вычислять y' для $y = \sqrt{x}$:

☞ $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)$; ☞ $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$;

☞ $y' = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$.

🕮 См. определение 2.

1.3. Укажите, что получается при вычислении предела, если вместо Δx подставить ноль:

☞ неопределенность $[0/0]$; ☞ 0; ☞ ∞.

1.4. Укажите, как преобразовать данное выражение, чтобы избавиться от этой неопределенности:

☞ $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$; ☞ $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{2x + \Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}$;

☞ $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}$.

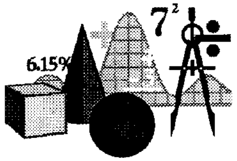
🕮 Необходимо числитель и знаменатель умножить на $(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})$ и учесть, что

$$\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x+\Delta x}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2.$$

1.5. Вычислите получившийся предел. Укажите верный ответ:

☞ $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; ☞ $y'=\dfrac{1}{x}$; ☞ $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

🕮 Подставьте $\Delta x=0$.



Задача 2

Пользуясь определением производной, вычислите производную функции $y=\sin x$.

2.1. Укажите, чему равно приращение функции Δy, если Δx — приращение независимой переменной:

☞ $\Delta y=\sin(x+\Delta x)$; ☞ $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin\Delta x$;

☞ $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$; ☞ $\Delta y=\sin\Delta x$.

🕮 См. определение 1, где $f(x)=\sin x$.

2.2. Укажите, как, пользуясь определением производной, следует вычислять производную функции $y=\sin x$:

☞ $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$;

☞ $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\sin(x+\Delta x)-\sin x\right)$;

☞ $y'=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$.

🕮 См. определение 2.

2.3. Укажите, что получается при вычислении предела, если вместо Δx подставить ноль:

☞ неопределенность $[0/0]$; ☞ 0; ☞ ∞.

2.4. Чтобы избавиться от неопределенности, следует выделить первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$. Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\sin\Delta x-1}{\Delta x}$, где $\alpha=\Delta x$;

☞ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\cos(x+\Delta x/2)\sin\Delta x/2}{\Delta x/2\cdot 2}$, где $\alpha=\dfrac{\Delta x}{2}$;

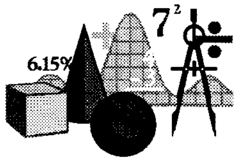
☞ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\cos(x+\Delta x/2)\sin\Delta x/2}{\Delta x}$, где $\alpha=\dfrac{\Delta x}{2}$.

🕮 $\sin\varphi-\sin\psi=2\sin\dfrac{\varphi-\psi}{2}\cos\dfrac{\varphi+\psi}{2}$.

2.5. Вычислите получившийся предел. Укажите верный ответ:

☞ $y'=\cos x$; ☞ $y'=\cos(\Delta x/2)$; ☞ $y'=1$.

🕮 Подставте $\Delta x=0$.



Задача 3

Вычислите производную функции $y=\dfrac{1}{3}x^3+2\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}-4$.

3.1. Укажите, каким образом, пользуясь правилами дифференцирования, можно вычислить производную функции

$y=\frac{1}{3}x^3+2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-4$:

☞ $y'=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'+\left(2\sqrt{x}\right)'+\left(\frac{1}{x}\right)'+(-4)'$;

☞ $y'=\frac{1}{3}\left(x^3\right)'+2\left(\sqrt{x}\right)'+\left(\frac{1}{x}\right)'+(-4)'$;

☞ $y'=\left(\frac{1}{3}x^3+2\sqrt{x}\right)'\left(\frac{1}{x}-4\right)+\left(\frac{1}{3}x^3+2\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{x}-4\right)'$.

🕮 См. правила 1.2 и 1.4.

3.2. Вычислите производную первого слагаемого x^3. Укажите верный ответ:

☞ $\left(x^3\right)'=3x^2$; ☞ $\left(x^3\right)'=2x^2$; ☞ $\left(x^3\right)'=3x$.

🕮 См. правило 2.1; $n=3$, $u=x$.

3.3. Вычислите и укажите производную функции $\sqrt{x}$.

☞ $\left(\sqrt{x}\right)'=1/\left(2x^2\right)$; ☞ $\left(\sqrt{x}\right)'=2/\sqrt{x}$; ☞ $\left(\sqrt{x}\right)'=1/\left(2\sqrt{x}\right)$.

🕮 См. правило 2.1. $\sqrt{x}=x^{1/2}$, $n=1/2$.

3.4. Вычислите и укажите производную функции $1/x$.

☞ $(1/x)'=1/x^2$; ☞ $(1/x)'=-1/x^2$; ☞ $(1/x)'=1$.

🕮 См. $1/x=x^{-1}$ и правило 2.1, $n=-1$.

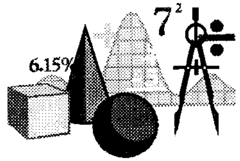
3.5. Вычислите производную последнего слагаемого -4. Укажите верный ответ:

☞ 0; ☞ -4; ☞ -1.

🕮 См. правило 1.1.

3.6. Укажите окончательный ответ:

☞ $x^2-\frac{1}{x^2}$; ☞ $x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$; ☞ $x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}$.



Задача 4

Вычислите производную функции $y=\left(x^3+3\sqrt[3]{x}+1\right)\cdot 3^x$.

4.1. Укажите, каким правилом необходимо воспользоваться, чтобы продифференцировать произведение двух функций:

☞ $(uv)'=u'\cdot v'$; ☞ $(uv)'=u'v+uv'$; ☞ $(uv)'=u'v-uv'$.

🕮 См. правило 1.3.

4.2. Вычислите производную первого множителя $\left(x^3+3\sqrt[3]{x}+1\right)$. Укажите верный ответ:

☞ $y'=3x^2+1/\sqrt{x^3}$; ☞ $y'=3x^2+x^{2/3}$;

☞ $y'=3x^2+1/\sqrt[3]{x^2}+1$; ☞ $y'=3x^2+1/\sqrt[3]{x^2}$.

🕮 См. правила 1.1, 1.2, 1.4 и задачу 1. См. формулу 2.1.

4.3. Вычислите производную второго множителя 3^x. Укажите верный ответ:

☞ $y'=3^x\ln 3$; ☞ $y'=x\cdot 3^{x-1}$;

☞ $y'=3^x\ln x$; ☞ $y'=3^x$.

🕮 См. правило 2.3; $a=3$.

4.4. Укажите окончательный ответ:

☞ $\left(3x^2+\frac{1}{3\sqrt{x^2}}\right)\cdot 3^x$;

☞ $\left(3x^2+\frac{1}{3\sqrt{x^2}}\right)\cdot 3^x+\left(x^3+3\sqrt[3]{x}+1\right)\cdot 3^x\ln 3$;

☞ $\left(x^3+3\sqrt[3]{x}+1\right)3^x$.

Задача 5

Вычислите производную функции $y = \operatorname{arctg} x/(1+x^2)$.

5.1. Укажите, каким правилом необходимо воспользоваться при нахождении производной данной функции:

☞ применение правила не требуется;

☞ $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$; ☞ $(u/v)' = u'/v'$;

☞ $(u/v)' = (u'v + uv')/v^2$.

🕮 См. правило 1.5.

5.2. Вычислите производную числителя $\operatorname{arctg} x$. Укажите верный ответ:

☞ $(\operatorname{arctg} x)' = 1/\sqrt{1+x^2}$; ☞ $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1-x^2)$;

☞ $(\operatorname{arctg} x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$; ☞ $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$.

🕮 См. формулу 2.12, $u = x$.

5.3. Вычислите производную знаменателя $1+x^2$. Укажите верный ответ:

☞ $(1+x^2)' = 2x$; ☞ $(1+x^2)' = 1+2x$;

☞ $(1+x^2)' = 2$; ☞ $(1+x^2)' = x$.

🕮 См. правила 1.2 и 2.1.

5.4. Укажите окончательный ответ:

☞ $\dfrac{1-2x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}$; ☞ $\dfrac{1-2\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}$; ☞ $\dfrac{1-2x\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$.

Задача 6

Вычислите производную функции $y = \sin x \cdot \operatorname{tg} x - 1/\cos x$.

6.1. Укажите, как, пользуясь правилами дифференцирования, можно вычислить производную данной функции:

☞ $y' = (\sin x)'(\operatorname{tg} x)' - \dfrac{1}{(\cos x)'}$;

☞ $y' = (\sin x)' \operatorname{tg} x - \sin x (\operatorname{tg} x)' - \dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}$;

☞ $y' = (\sin x)' \operatorname{tg} x + \sin x (\operatorname{tg} x)' + \dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}$.

🕮 См. правила 1.3 и 1.6.

6.2. Укажите производную функции $\sin x$.

☞ $(\sin x)' = \cos x$; ☞ $(\sin x)' = -\cos x$.

🕮 См. формулу 2.6, $u = x$.

6.3. Укажите производную функции $\operatorname{tg} x$.

☞ $(\operatorname{tg} x)' = 1/\sin^2 x$; ☞ $(\operatorname{tg} x)' = 1/(1+x^2)$;

☞ $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$.

🕮 См. формулу 2.8.

6.4. Укажите производную функции $\cos x$.

☞ $(\cos x)' = \sin x$; ☞ $(\cos x)' = -\sin x$.

🕮 См. формулу 2.7.

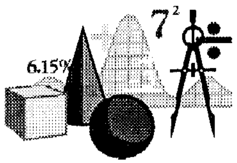
6.5. Укажите окончательный ответ:

☞ $\cos x$; ☞ $\sin x$; ☞ $\cos x \operatorname{tg} x + \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Задачи для самостоятельной работы

Вычислите производные следующих функций.

Условие	Ответ
$y=\dfrac{4x^2-8x}{x-1}$	$y'=\dfrac{4x^2-8x+8}{(x-1)^2}$
$y=x^5e^x$	$y'=\left(5x^4+x^5\right)e^x$
$y=x\ln x$	$y'=\ln x+1$
$y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}$	$y'=\dfrac{2}{(\cos x-\sin x)^2}$
$y=x(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x)$	$y'=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x$



Задача 7

Вычислите производную сложной функции $y=\sin^3 x$.

7.1. Представьте данную функцию $y=\sin^3 x$ в виде цепочки составляющих функций, чьи производные можно вычислить, пользуясь основной таблицей. Укажите верный ответ:

☞ $y=\sin u,\ u=x^3$; ☞ $y=u^3,\ u=\sin x$.

🕮 Если $y=\sin u,\ u=x^3$, то отсюда следует $y=\sin x^3\neq\sin^3 x$.

7.2. Укажите, как вы предлагаете вычислить производную функции $y=\sin^3 x$, которая представляется в виде цепочки двух элементарных функций:

☞ непосредственно по одной из формул: $y'=3\sin^2 x$;

☞ непосредственно по одной из формул: $y'=\cos^3 x$;

☞ воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции: $y'_x=y'_u u'_x$.

🕮 См. правило 3.

7.3. Вычислите производную y'_u функции $y=u^3$. Укажите верный ответ:

☞ $y'_u=3u$; ☞ $y'_u=3u^4$; ☞ $y'_u=3u^2$.

🕮 См. формулу 2.1.

7.4. Вычислите производную функции u'_x функции $u=\sin x$. Укажите верный ответ:

☞ $u'_x=\cos x$; ☞ $u'_x=-\cos x$; ☞ $u'_x=-\sin x$.

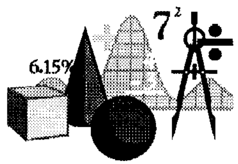
🕮 См. формулу 2.6., $u=x$.

7.5. Вычислите производную y'_x функции $y=\sin^3 x$, используя предыдущие вычисления. Укажите верный ответ:

☞ $y'=3\sin^2 x\cos^2 x$; ☞ $y'=3\sin^2 x\cos^3 x$;

☞ $y'=3\sin^2 x\cos x$.

🕮 См. правило 3 и подставьте все вычисленные производные.



Задача 8

Вычислите производную сложной функции $y=2^{x/\ln x}$.

8.1. Укажите, можно ли сразу, пользуясь одной из табличных производных, вычислить производную данной функции $y=2^{x/\ln x}$, или необходимо предварительно расписать функцию в цепочку составляющих функций:

☞ можно сразу вычислять производную, пользуясь одной из формул: $y' = 2^{x/\ln x}\ln 2$;

☞ можно сразу вычислять производную, используя одно из правил: $y' = 2^{(\ln x - 1)/\ln^2 x}$;

☞ необходимо предварительно представить данную сложную функцию цепочкой составляющих функций.

🕮 См.правила 2 и 3.

8.2. Распишите $y = 2^{x/\ln x}$ в цепочку составляющих функций. Укажите верный ответ:

☞ $y = 2^u$, $u = x/\ln x$;

☞ $y = u^{x/\ln x}$, $u = 2$;

☞ $y = 2^{u/v}$, $u = x$, $v = \ln x$.

8.3. Вычислите y'_x функции $y = 2^u$, где $u = x/\ln x$. Укажите верный ответ:

☞ $y'_x = dy/du$; ☞ $y'_x = u'_x$; ☞ $y'_x = y'_u u'_x$.

🕮 См.правило 3.

8.4. Вычислите производную y'_u функции $y = 2^u$. Укажите верный ответ:

☞ $y'_u = u \cdot 2^{u-1}$; ☞ $y'_u = 2^u \ln 2$;

☞ $y'_u = 2^u$; ☞ $y'_u = 2^u \ln u$.

🕮 См. правило 2.3.

8.5. Вычислите производную u'_x функции $u = x/\ln x$. Укажите верный ответ:

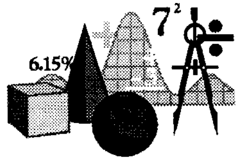
☞ $u'_x = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$; ☞ $u'_x = x$;

☞ $u'_x = \dfrac{1 - \ln x}{\ln^2 x}$; ☞ $u'_x = \dfrac{\ln x + 1}{\ln^2 x}$.

🕮 См. правила 1.5 и 2.4.

8.6. Получите окончательный ответ:

☞ $2^{x/\ln x}\dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$; ☞ $2^{x/\ln x}\ln 2\dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$; ☞ $2^x\dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.



Задача 9

Вычислите производную функции $y = \mathrm{ctg}\left[\ln(3x - x^2)\right]$.

9.1. Распишите предварительно данную функцию $y = \mathrm{ctg}(\ln(3x - x^2))$ в цепочку элементарных функций. Укажите верный ответ:

☞ $y = ctg\,u$, $u = \ln v$, $v = (3x - x^2)$;

☞ $y = \ln u$, $u = ctg\,v$, $v = (3x - x^2)$;

☞ $y = ctg\,u$, $u = \ln(3x - x^2)$.

🕮 Следует помнить, что от каждой элементарной функции можно будет взять производную, пользуясь правилами 1 и 2.

9.2. Укажите, по какому правилу надо вычислять производную y'_x заданной функции:

☞ $y'_x = y'_u u'_x$; ☞ $y'_x = y'_u v'_x$; ☞ $y'_x = y'_u u'_v v'_x$.

🕮 См. правило 3.

9.3. Вычислите производную y'_u функции $y = \mathrm{ctg}\,u$. Укажите верный ответ:

☞ $y'_u = 1/\sin^2 u$; ☞ $y'_u = -1/\sin^2 u$;

☞ $y' = 1/\cos^2 u$; ☞ $y' = -1/\cos^2 u$.

🕮 См.правило 2.9.

9.4. Укажите, чему равна производная u'_v функции $u = \ln v$:

☞ $u'_v = 1/\ln v$; ☞ $u'_v = -1/\sin^2 \ln v$; ☞ $u'_v = 1/v$.

🕮 См. правило 2.4, $u = v$.

9.5. Вычислите производную v'_x функции $v = 3x - x^2$. Укажите верный ответ:

☞ $v'_x = 1 - 2x$; ☞ $v'_x = 3 - 2x$; ☞ $v'_x = 3x - 2x = x$.

🕮 См.правила 1.2, 1.4 и 2.1.

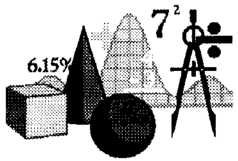
9.6. Запишите окончательно, чему равна производная y'_x функции $y = \operatorname{ctg}\left(\ln\left(3x - x^2\right)\right)$. Укажите верный ответ:

☞ $y'_x = -\dfrac{1}{\sin^2\left(3x - x^2\right)} \dfrac{1}{3 - 2x}$;

☞ $y'_x = -\dfrac{1}{\sin^2 \ln(3 - 2x)} \dfrac{1}{3 - 2x}$;

☞ $y'_x = -\dfrac{1}{\sin^2\left(3x - x^2\right)} \dfrac{1}{3x - x^2}(3 - 2x)$;

☞ $y'_x = -\dfrac{1}{\sin^2 \ln\left(3x - x^2\right)} \dfrac{1}{3x - x^2}(3 - 2x)$.



Задача 10

Вычислите производную функции $y = \sqrt{1 - x^2} \arccos^2 x$.

10.1. Какие правила дифференцирования необходимо использовать для нахождения производной функции $y = \sqrt{1 - x^2} \arccos^2 x$. Укажите верный ответ:

☞ правило дифференцирования сложной функции;
☞ правила дифференцирования сложной функции и дифференцирования произведения двух функций.

10.2. Вычислите производную произведения $y = y_1 y_2$. Укажите верный ответ:

☞ $y' = y'_1 y'_2$; ☞ $y' = y'_1 y_2 - y_1 y'_2$; ☞ $y' = y'_1 y_2 + y_1 y'_2$

🕮 См. правило 1.3.

10.3. Представьте y_1 в уравнении $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ в виде цепочки элементарных функций и, продифференцировав каждое звено, сразу запишите производную $(y_1)'_x$. Укажите верный ответ:

☞ $(y_1)'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}(-2x)$; ☞ $(y_1)'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$;

☞ $(y_1)'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - x^2}\,(-2x)}$.

🕮 $y_1 = \sqrt{u}$, $u = \left(1 - x^2\right)$; $(y_1)'_x = (y_1)'_u u'_x = \dfrac{-2x}{2\sqrt{u}}$.

10.4. Представляя $y_2 = \arccos^2 x$ в виде цепочки элементарных функций и дифференцируя каждое звено, вычислите производную $(y_2)'_x$. Укажите верный ответ:

☞ $(y_2)'_x = 2\arccos x$; ☞ $(y_2)'_x = -\dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$;

☞ $(y_2)'_x = 2\arccos x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$.

🕮 $y_2 = u^2$, $u = \arccos x$; $(y_2)'_x = (y_2)'_u u'_x = 2u\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$.

10.5. Теперь, учитывая правило дифференцирования произведения, укажите окончательный результат для производной функции $y = \sqrt{1 - x^2} \arccos^2 x$:

☞ $y' = \dfrac{2x \arccos x}{1 - x^2}$; ☞ $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{2x \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$;

☞ $y' = -\dfrac{x \arccos^2 x}{\sqrt{1 - x^2}} - 2\arccos x$.

🕮 См. правило 1.3 для $y = y_1 y_2$ и подставьте y'_1 и y'_2.

Задача 11

Вычислите производную второго порядка функции $y = \sin^2 x$.

11.1. Укажите, как следует вычислять производную второго порядка функции $y = f(x)$:

- ☞ возвести производную первого порядка в квадрат;
- ☞ вычислить производную от производной первого порядка данной функции.

🕮 См. определение 3.

11.2. Вычислите производную первого порядка y' функции $y = \sin^2 x$. Укажите ответ:

☞ $y' = 2\sin x$; ☞ $y' = 2\sin x\cos x$; ☞ $y' = 2\sin x\cos^2 x$.

🕮 См. правила 3, 2.

11.3. Вычислите производную второго порядка y'' данной функции, если $y' = \sin 2x$. Укажите верный ответ:

☞ $y'' = 2\cos 2x$; ☞ $y'' = \cos 2x$; ☞ $y'' = -2\cos 2x$.

🕮 См. правила 3, 2.

Замечание. Для функции $y = \sin^2 x$ можно записать формулу, позволяющую найти производную любого порядка. Действительно,

$$y''' = (y'')' = (2\cos 2x)' = -4\sin 2x;$$

$$y^{IV} = (-4\sin 2x)' = -8\cos 2x; \quad y^{V} = 16\sin 2x; \ldots$$

$$y^{(n)} = 2^{n-1}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right) \text{ или}$$

$$y^{(n)} = -2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}n\right), \; n \in N.$$

Задачи для самостоятельной работы

Вычислите производные сложных функций

Условие	Ответ
$y = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}$	$y' = \frac{1}{\sin x}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}(x/2)}\frac{1}{\cos^2(x/2)}\frac{1}{2}\right)$
$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 2^{\operatorname{tg} x}$	$y' = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2^{\operatorname{tg} x}\ln 2}{\cos^2 x}$
$y = \sin^2 x\cos^3 2x$	$y' = \sin 2x\cos^3 2x -$ $-6\sin^2 x\cos^2 2x\sin 2x$

Задача 12

Вычислите производную dy/dx функции $y(x)$, заданной следующим образом: $y^3 + x^3 - 3axy - 3 = 0$, где $a \neq 0$ – const.

12.1. Укажите, как называется в данном случае функция $y(x)$:

- ☞ сложной;
- ☞ заданной неявно;
- ☞ заданной параметрически.

🕮 См. правило 4.

12.2. Укажите, какой способ вычисления производной dy/dx функции $y(x)$, заданной этим уравнением, следует выбрать:

- ☞ выразить из данного уравнения $y = f(x)$ и вычислить производную $y' = f'(x)$;

☞ продифференцировать левую и правую части равенства, помня, что $y = y(x)$.

🕮 См. правило 4.1.

12.3. Вычислите производную $d\left(y^3\right)/dx$. Укажите верный ответ:

☞ $d\left(y^3\right)/dx = 3y^2y'$; ☞ $d\left(y^3\right)/dx = 3y^2$; ☞ $d\left(y^3\right)/dx = 3y'$.

🕮 Учитывая, что $y = y(x)$, следует пользоваться правилом 3:

$$\frac{dy^3}{dx} = \frac{d\left(y^3\right)}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

12.4. Вычислите производную $d(3axy)/dx$. Укажите верный ответ:

☞ $\dfrac{d(3axy)}{dx} = 3ay + 3ax$; ☞ $\dfrac{d(3axy)}{dx} = 3ay'$;

☞ $\dfrac{d(3axy)}{dx} = 3a\left(y + xy'\right)$.

🕮 См.правила 1.3, 1.4 и помните, что $y = y(x)$.

12.5. Укажите результат дифференцирования обеих частей равенства: $\dfrac{d}{dx}\left(y^3 + x^3 - 3axy - 3\right) = 0$:

☞ $3y^2 + 3x^2 - 3ay - 3axy' = 0$;

☞ $3y^2y' + 3x^2 - 3ay - 3axy' = 0$;

☞ $3y^2y' + 3x^2 - 3ay + 3axy' = 0$.

🕮 См. правила 1, 3, 4.1.

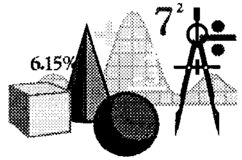
12.6. Из полученного уравнения выразите y'. Укажите верный ответ:

☞ $y' = \left(ay - x^2\right)/\left(y^2 - ax\right)$;

☞ $y' = \left(ay - x^2\right)/\left(ax - y^2\right)$;

☞ $y' = \left(y^2 - ax\right)/\left(ay - x^2\right)$.

🕮 Сгруппируйте слагаемые с y'.



Задача 13

Вычислите производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции, заданной неявно уравнением $y^2 + 2\ln y = x^4$, в точке $M(-1,1)$.

13.1. Укажите, как следует вычислять производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y(x)$, заданную данным уравнением:

☞ выразить из данного уравнения $y = f(x)$ и вычислить производную $y' = f'(x)$;

☞ продифференцировать обе части неравенства, помня, что $y = y(x)$.

🕮 См. правило 4.

13.2. Продифференцируйте данное уравнение. Укажите верный ответ:

☞ $2y + \dfrac{2}{y} = 4x^3$; ☞ $2yy' + \dfrac{2}{y} = 4x^3$;

☞ $2yy' + \dfrac{2}{y}y' = 4x^3$.

🕮 См. правила 3 и 4. $F(y) = y^2 + 2\ln y$ — сложная функция, так как $y = y(x)$.

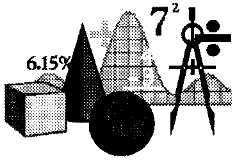
13.3. Выразите из получившегося уравнения производную $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Укажите верный ответ:

☞ $y' = \dfrac{2x^3y}{y^2+1}$; ☞ $y' = \dfrac{2x^3}{y^2+1}$; ☞ $y' = \dfrac{2x^3}{y+1}$.

13.4. Вычислите значение получившейся производной в точке $M\left(-1,1\right)$. Укажите верный ответ:

☞ $y'(M) = -\dfrac{2y}{y^2+1}$; ☞ $y'(M)=1$; ☞ $y'(M)=-1$.

🕮 Подставьте в выражение для производной y' значения $x=-1$ и $y=1$.



Задача 14

Вычислите производную второго порядка d^2y/dx^2 функции, заданной уравнением: $2\operatorname{arctg}(y/x) = \ln(x^2+y^2)$.

Вычислите предварительно производную первого порядка dy/dx функции, заданной уравнением $2\operatorname{arctg}(y/x) = \ln(x^2+y^2)$.

14.1. Укажите, какой способ решения следует для этого выбрать:

☞ выразить функцию $y = f(x)$ и продифференцировать ее;

☞ взять производные от обеих частей равенства, помня, что $y = y(x)$, а затем выразить y'.

🕮 См. правило 4.1.

14.2. Продифференцируйте обе части равенства: $\dfrac{d}{dx}\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\ln(x^2+y^2)\right)$. Укажите верный ответ:

☞ $\dfrac{2}{1+(y/x)^2}y' = \dfrac{1}{x^2+y^2}y'$;

☞ $\dfrac{2}{1+(y/x)^2}\dfrac{x-y}{x^2}y' = \dfrac{2x+2y}{x^2+y^2}y'$;

☞ $\dfrac{2}{1+(y/x)^2}\dfrac{y'x-y}{x^2} = \dfrac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$.

🕮 См. правила 3, 4.

14.3. Выразите из этого равенства y'. Укажите верный ответ:

☞ $y' = (x+y)/(x-y)$;

☞ $y' = (x+xy^2+x^2y+y^3)/(x^3+xy^2-y-y^3)$;

☞ $y' = (x-y)/(x+y)$.

14.4. Укажите, каким образом следует вычислять производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

☞ возвести найденную производную y' в квадрат;

☞ продифференцировать еще раз обе части равенства $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$, учитывая, что $y = y(x)$.

🕮 См. определение 3 и правило 4.2.

14.5. Продифференцируйте по x обе части выражения $dy/dx = (x+y)/(x-y)$ и укажите верный ответ:

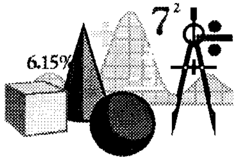
☞ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2y}{(x-y)^2}y'$; ☞ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2y+2xy'}{(x-y)^2}$;

☞ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2xy'}{(x-y)^2}$.

🕮 См. правило 4.2.

14.6. Получите окончательный ответ:

☞ $\dfrac{x^2+y^2}{(x-y)^3}$; ☞ $\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$; ☞ $\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^2}$.



Задача 15

Вычислите значение производной третьего порядка y''' функции, заданной неявно уравнением $x^4+y^4+2x-2y+2=0$, в точке $M(-1;1)$.

15.1. Для вычисления производной первого порядка y' функции, заданной неявно уравнением $x^4+y^4+2x-2y+2=0$, продифференцируйте обе части равенства по переменной x. Укажите верный ответ:

☞ $4x^3+4y^3+2-2=0$;

☞ $4x^3+4y^3\cdot y'+2-2y'=0$;

☞ $\left(4x^3+4y^3\right)\cdot y'=0$.

🕮 См. правила 4.1.

15.2. Вычислите значение первой производной в точке $M(-1;1)$. Укажите верный ответ:

☞ $y'(M)=1$; ☞ $y'(M)=-3$; ☞ $y'(M)=-1$.

🕮 Подставьте $x=-1, y=1$ и вычислите $y'(M)$.

Замечание

Для вычисления производной второго порядка можно поступить двояко:

а) выразить из равенства $4x^3+4y^3y'+2-2y'=0$ производную первого порядка $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x^3+2}{2-4y^3}$ и продифференцировать ее еще раз, помня, что $y=y(x)$ и $y'=y'(x)$. (См. задачу № 14);

б) продифференцировать вновь по переменной x обе части равенства $4x^3+4y^3y'+2-2y'=0$, помня, что $y=y(x)$ и $y'=y'(x)$.

🕮 См. правило 4.2.

15.3. Найдите производную второго порядка y'', продифференцировав предварительно обе части равенства $4x^3+4y^3y'+2-2y'=0$ по переменной x. Укажите верный ответ:

☞ $12x^2+12y^2\left(y'\right)^2-2y''=0$;

☞ $12x^2+12y^2y'+4y^3y''-2y''=0$;

☞ $12x^2+12y^2\left(y'\right)^2+4y^3y''-2y''=0$.

🕮 Необходимо помнить, что $y=y(x)$ и $y'=y'(x)$ и $\left(y^3y'\right)'=\left(y^3\right)'y'+y^3\left(y'\right)'$.

15.4. Вычислите значение производной y'' в точке $M(-1;1)$, учитывая, что $y'(M)=1$. Укажите верный ответ:

☞ $y''(M)=-12$; ☞ $y''(M)=0$; ☞ $y''(M)=4$.

🕮 Подставьте $x=-1,\ y=1,\ y'=1$.

15.5. Какой способ вычисления производной третьего порядка y''' в точке $M(-1;1)$ наиболее прост, если производная второго порядка удовлетворяет уравнению

$6x^2+6y^2\left(y'\right)^2+2y^3y''-y''=0$:

☞ выразить производную $y''=f(x,y)$ и, продифференцировав ее, найти $y'''(M)$;

☞ продифференцировать по x обе части равенства $6x^2+6y^2\left(y'\right)^2+2y^3y''-y''=0$, учитывая, что $y=y(x)$; $y'=y'(x)$ и $y''=y''(x)$; подставив все известные значения в точке M, вычислить $y'''(M)$.

15.6. Выполните дифференцирование обеих частей равенства $6x^2+6y^2\left(y'\right)^2+2y^3y''-y''=0$. Укажите верный ответ:

☞ $12x+12y\left(y'\right)^2+12y^2y'+6y^2y''+2y^3y'''-y'''=0$;

☞ $12x+12y(y')^3+12y^2y'+6y^2y'y''+2y^3y'''-y'''=0$;

☞ $12x+12y(y')^3+12y^2y'y''+6y^2y'y''+2y^3y'''-y'''=0$.

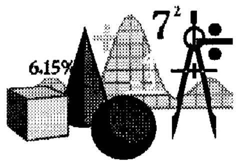
Помните, что $y=y(x)$; $y'=y'(x)$ и $y''=y''(x)$;

$$\left(y^2(y')^2\right)'=\left(y^2\right)'(y')^2+y^2\left((y')^2\right)'; \quad \left(y^2y''\right)'=\left(y^3\right)'y''+y^3\left(y''\right)'.$$

15.7. Вычислите значение производной третьего порядка, заданной в точке $M(-1;1)$, учитывая, что $y'(M)=1$ и $y''(M)=-12$. Укажите верный ответ:

☞ $y'''(M)=216$; ☞ $y'''(M)=192$; ☞ $y'''(M)=72$.

Подставьте $x=-1$, $y=1$, $y''=-12$.



Задача 16

Вычислите производную функции $y=(\sin 3x)^{\sqrt{x}}$.

16.1. Укажите, какая функция задана в условии:

☞ показательно-степенная;

☞ сложная;

☞ неявная.

См. правило 5.

16.2. Укажите, какой метод необходимо выбрать для дифференцирования этой функции:

☞ по табличной формуле $(u^n)'$;

☞ по табличной формуле $(a^n)'$;

☞ необходимо предварительное логарифмирование.

См. правило 5.

16.3. Прологарифмируйте данную функцию. Укажите верный ответ:

☞ $\ln y=\sqrt{x}\ln\sin 3x$; ☞ $y=\sqrt{x}\ln\sin 3x$; ☞ $\ln y=\ln\left(\sqrt{x}\sin 3x\right)$.

См. правило 5.

16.4. Укажите, как следует вычислять производную функции $y(x)$, заданной получившимся равенством:

☞ взять производную от правой части: $y'=\left(\sqrt{x}\sin 3x\right)'$;

☞ как производную функции, заданной в неявном виде.

См. правило 5.

16.5. Продифференцируйте по х обе части равенства $\ln y=\sqrt{x}\ln\sin 3x$, помня, что $y=y(x)$. Укажите верный ответ:

☞ $\dfrac{1}{y}=\dfrac{3\cos 3x}{2\sqrt{x}\sin 3x}$; ☞ $\dfrac{1}{yy'}=\dfrac{3\sin 3x}{2\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\dfrac{\cos 3x}{\sin 3x}$;

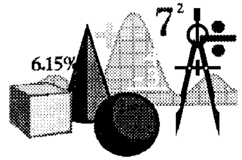
☞ $\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{\ln\sin 3x}{2\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\operatorname{ctg}3x$.

См. правила 4, 3, 2, 1.

16.6. Приведите окончательный ответ:

☞ $(\sin 3x)^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln\sin 3x}{\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\operatorname{ctg}3x\right)$;

☞ $(\sin 3x)^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln\sin 3x}{2\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\operatorname{ctg}3x\right)$; ☞ $\dfrac{\ln\sin 3x}{2\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\operatorname{ctg}3x$.



Задача 17

Пользуясь «логарифмической производной», вычислите производную функции $y=\dfrac{x\sqrt[x]{2x-1}}{e^x}$.

17.1. Укажите, можно ли вычислить производную данной функции без предварительного логарифмирования:

☞ можно; ☞ нельзя.

🕮 См. правило 5.

17.2. Прологарифмируйте функцию $y=\left(x\sqrt[x]{2x-1}\right)/e^x$. Укажите верный ответ:

☞ $\ln y=\ln x+x\ln(2x-1)-x\ln e$;

☞ $\ln y=\frac{1}{x}(\ln x+\ln(2x-1))-x\ln e$;

☞ $\ln y=\ln x+\frac{1}{2x}\ln(2x-1)-x\ln e$;

☞ $\ln y=\ln x+\frac{1}{x}\ln(2x-1)-x\ln e$.

🕮 См. правило 5.а.

17.3. Продифференцируйте обе части равенства $\ln y=\ln x+\frac{1}{x}\ln(2x-1)-x$ по переменной x. Укажите верный ответ:

☞ $\frac{1}{y}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(2x-1)+\frac{2}{x(2x-1)}-1$;

☞ $\frac{1}{y}y'=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2(2x-1)}-1$;

☞ $\frac{1}{y}y'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(2x-1)+\frac{2}{x(2x-1)}-1$.

🕮 См. правила 4, 1, 2, 3.

17.4. Укажите окончательный ответ:

☞ $\frac{\sqrt[x]{2x-1}}{e^x}\left(\frac{\ln(2x-1)}{x}+\frac{2}{2x-1}\right)$;

☞ $\frac{\sqrt[x]{2x-1}}{e^x}\left(1-\frac{\ln(2x-1)}{x}+\frac{2}{2x-1}-x\right)$;

☞ $\frac{\sqrt[x]{2x-1}}{e^x}\left(\frac{\ln(2x-1)}{x}-x\right)$.

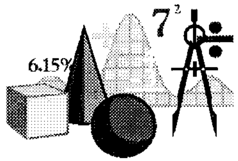
Задачи для самостоятельной работы

Пользуясь «логарифмической производной» вычислите производную для следующих функций.

Условие	Ответ
$y=x^{\operatorname{tg}x}$	$y'=x^{\operatorname{tg}x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x}+\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)$
$y=\frac{(x+1)^2\sqrt[3]{3x-1}}{x^2(x-1)}$	$y'=\frac{(x+1)^2\sqrt[3]{3x-1}}{x^2(x-1)}\left(\frac{2}{x+1}+\frac{1}{3x-1}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}\right)$
$y^x=x^y$	$y'=\frac{y/x-\ln y}{x/y-\ln x}$

Вычислите производные следующих неявно заданных функций.

Условие	Ответ
$x\cos y+y\sin x=xy,\quad y'=?$	$y'=\frac{y\cos x+\cos y-y}{x\sin y-\sin x+x}$
$x^2+y^2=2xy\quad y''(1,1)=?$	$y''(1,1)=-2$
$x\arcsin y=\sqrt{1-y^2}-x$ $y'(1,0)=?$ $y''(1,0)=?$	$y'(1,0)=-1$ $y''(1,0)=1$



Задача 18

Вычислите производную dy/dx функции:

$$\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=\ln(t+1), \quad t>-1. \end{cases}$$

18.1. Укажите, как называется функция $y(x)$, заданная системой $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \ln(1+t): \end{cases}$

☞ сложная; ☞ неявная; ☞ параметрическая.

📖 См. правило 6.

18.2. Укажите, как следует вычислять производную y'_x от такой функции:

- ☞ выразить y через x и вычислить непосредственно $y'_x(x)$;
- ☞ воспользоваться формулой для вычисления производной функции, заданной параметрически.

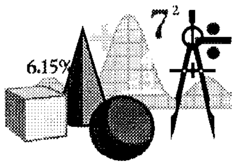
📖 См. правило 6.1.

18.3. Вычислите производную y'_x функции $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \ln(t+1). \end{cases}$

Укажите верный ответ:

☞ $y'_x = 2$; ☞ $y'_x = \dfrac{1}{2(t+1)^2}$; ☞ $y'_x = 2(t+1)^2$.

📖 $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$.



Задача 19

Вычислите производную второго порядка y''_{xx} функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(t^2+1), \quad t \in (-\infty, +\infty). \end{cases}$$

19.1. Вычислите предварительно производную первого порядка y'_x данной функции. Укажите верный ответ:

☞ $y'_x = 1/2t$; ☞ $y'_x = 1$; ☞ $y'_x = 2t$.

📖 См. правило 6.1.

19.2. Как следует вычислять производную второго порядка функции $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(t^2+1): \end{cases}$

- ☞ вычислить производную получившейся новой функции непосредственно по t;
- ☞ вычислить производную получившейся новой функции непосредственно по x;
- ☞ воспользоваться формулой для вычисления производной функции, заданной параметрически.

📖 $y'_x = f(t)$! См. правило 6.2.

19.3. Укажите, как выглядит формула для вычисления y''_{xx} функции, заданной параметрически:

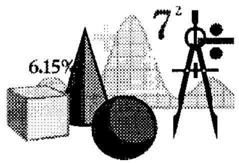
☞ $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$; ☞ $y''_{xx} = (y'_x)'_x$; ☞ $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_x}{x}$; ☞ $y''_{xx} = (y'_x)'_x$.

📖 См. правило 6.2а.

19.4. Вычислите производную второго порядка от данной функции. Укажите верный ответ:

☞ $y''_{xx} = \dfrac{2}{t^2+1}$; ☞ $y''_{xx} = 2(t^2+1)$;

☞ $y''_{xx} = 2t(t^2+1)$; ☞ $y''_{xx} = \dfrac{1}{2(t^2+1)}$.



Задача 20

Вычислите производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \quad t \in (0, \pi/2). \end{cases}$

20.1. Вычислите производную первого порядка y'_x данной функции. Укажите верный ответ:

☞ $y'_x = -\operatorname{tg} t$; ☞ $y'_x = -\operatorname{ctg} t$; ☞ $y'_x = 1$.

🕮 См. правило 6.1.

20.2. Укажите, как следует вычислять производную второго порядка данной функции:

☞ вычислить производную от y'_x непосредственно по x;

☞ вычислить производную от y'_x по переменной t;

☞ еще раз воспользоваться формулой для вычисления производной функции, заданной параметрически.

🕮 $y'_x = f(t)$. См. правило 6.2.

20.3. Укажите, как выглядит эта формула, записанная для вычисления y''_{xx} функции, заданной параметрически:

☞ $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$; ☞ $y''_{xx} = (y'_x)'_x$; ☞ $y''_{xx} = (y'_x)'_t$.

🕮 См. правило 6.2а.

20.4. Вычислите производную второго порядка от данной функции. Укажите верный ответ:

☞ $y''_{xx} = \dfrac{-2}{(1+t^2)a\sin t}$; ☞ $y''_{xx} = \dfrac{-1}{a\sin^3 t}$; ☞ $y''_{xx} = -\dfrac{1}{\sin^2 t}$.

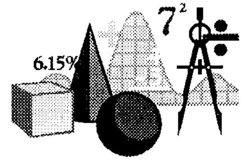
Замечание

Производные более высокого порядка вычисляются аналогично. Например, в данной задаче:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y''_{xx} = -\dfrac{1}{a\sin^3 t} \end{cases} \Rightarrow \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d(y''_{xx})}{dx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}.$$

Построив таким образом формулу для вычисления производной третьего порядка, находим ее:

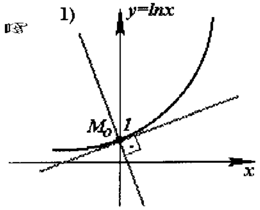
$$y'''_{xxx} = \left(\frac{3\cos t}{a\sin^4 t}\right)\Big/(-a\sin t) = -\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t} \text{ и т. д.}$$

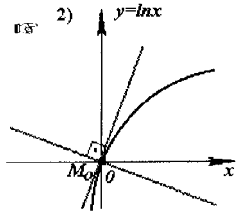


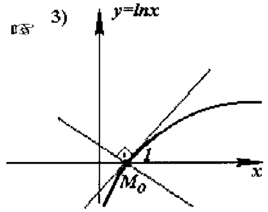
Задача 21

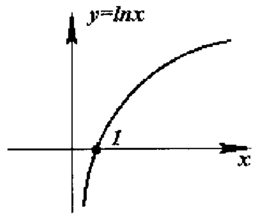
Составьте уравнения касательной и нормали к кривой $y = \ln x$ в точке ее пересечения с осью OX.

21.1. Сделайте чертеж по условию задачи. Укажите верный ответ:

☞ 1)


☞ 2)


☞ 3)


🕮


21.2. Укажите, в каком виде составляется уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$:

☞ $y - y_0 = k(x - x_0)$; ☞ $y - y_0 = kx$; ☞ $y + y_0 = k(x + x_0)$.

🕮 См. правило 7.

21.3. Укажите, что такое "k" в этом уравнении:

☞ координата точки пересечения прямой с осью OY;

☞ угловой коэффициент, равный тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси OX.

🕮 См. правило 7.

21.4. Укажите, как найти "k" касательной:

☞ по чертежу, учитывая, что $k = \operatorname{tg}\varphi$;

☞ исходя из геометрического смысла производной.

📖 См. правило 7.

21.5. Укажите, как именно:

☞ $k = y'$; ☞ $k = 1/y'$; ☞ $k = y'(M_0)$.

📖 См. правило 7.

21.6. Вычислите $y'(M_0)$, если $y = \ln x$ и $M_0(1,0)$. Укажите верный ответ:

☞ $k = y'(M_0) = \infty$; ☞ $k = y'(M_0) = 0$; ☞ $k = y'(M_0) = 1$.

📖 Вычислите y' функции $y = \ln x$ и подставьте $x = 1$.

21.7. Укажите, как вычислить угловой коэффициент нормали:

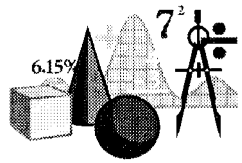
☞ $k_{\text{норм.}} = 1/k_{\text{кас.}}$; ☞ $k_{\text{норм.}} = -k_{\text{кас.}}$; ☞ $k_{\text{норм.}} = -1/k_{\text{кас.}}$.

📖 См. правило 7.

21.8. Укажите уравнение касательной и нормали:

☞ $y = x$; $y = 1 - x$; ☞ $y = x - 1$; $y = 1 + x$;

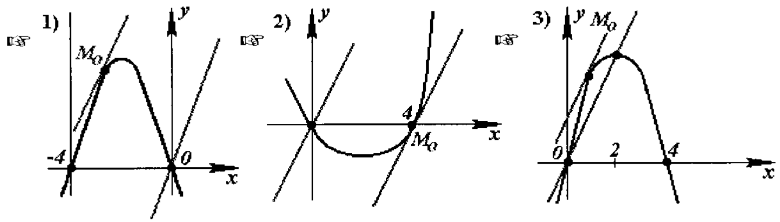
☞ $y = 1 - x$; $y = -x$.



Задача 22

Составьте уравнение той касательной к кривой $y = 4x - x^2$, которая параллельна прямой $y = 2x$.

22.1. Сделайте чертеж к задаче. Укажите верный ответ:



22.2. Укажите, что для этого уравнения известно по условию:

☞ $M_0(x_0, y_0)$ — точка касания;

☞ угловой коэффициент $k_{\text{кас.}}$;

☞ $M_0(x_0, y_0)$ и $k_{\text{кас.}}$;

☞ ничего неизвестно.

📖 Если две прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны.

22.3. Необходимо найти точку касания $M_0(x_0, y_0)$. Укажите, как это сделать:

☞ по чертежу;

☞ найти точку пересечения прямой $y = 2x$ и параболы;

☞ использовать то, что значение производной от функции, к графику которой строится касательная, вычисленное в точке касания, равно угловому коэффициенту $k_{\text{кас.}}$.

📖 См. правило 7.

22.4. Вычислите производную функции $y = 4x - x^2$. Укажите верный ответ:

☞ $y' = 4 - 2x$; ☞ $y' = 4 - x$; ☞ $y' = 1 - 2x$.

📖 См. правила 1, 2.

22.5. Используя результаты $y' = 4 - 2x$; $y'(M_o) = k_{\text{кас.}}$; $k_{\text{кас.}} = 2$, найдите x_0 точки касания. Укажите верный ответ:

☞ $x_0 = -1$; ☞ $x_0 = 1$; ☞ $x_0 = 0$.

📖 Решите уравнение $2 = 4 - 2x_0$.

22.6. Найдите y_0 точки касания. Укажите верный ответ:

☞ $y_0 = 2$; ☞ $y_0 = 3$; ☞ $y_0 = 0$.

📖 Подставьте $x_0 = 1$ в уравнение параболы $y = 4x - x^2$.

22.7. Составьте уравнение касательной:

☞ $y = 2x + 1$; ☞ $y = 2x - 1$; ☞ $y = 2x + 2$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислите производные d^2y/dx^2 следующих функций.

Условие	Ответ
$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t,\ t \in (0; \pi/2) \end{cases}$	$y'_x = -\operatorname{tg} t,\ y''_{xx} = \dfrac{1}{3a\cos^4 t \sin t}$
$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = te^t,\ t \in (-\infty; +\infty) \end{cases}$	$y'_x = -(1+t)e^{2t},\ y''_{xx} = (3+2t)e^{3t}$
$\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln(1-t^2),\ t \in (-1; 1) \end{cases}$	$y''_{xx} = \dfrac{2}{t^2 - 1}$

2. В какой точке кривой $y = \sqrt{x}$ касательная к ней перпендикулярна прямой $y = -4x$? (Ответ: $M_0(4, 2)$).

Составьте уравнение этой касательной. (Ответ: $y = \dfrac{1}{4}x + 1$).

📖 См. правило 7.

3. Составьте уравнения касательной и нормали к кривой $y^3 - y^2 = x^2$ в точке $M_0(2, 2)$. (Ответ: $\begin{matrix} y = x, \\ y = -x + 4 \end{matrix}$).

📖 См. правила 4 и 7.

4. Составьте уравнения касательной и нормали к кривой, заданной параметрически: $x = 2\cos t$, $y = \sqrt{3}\sin t$ (эллипс), в точке, где $t_0 = 2\pi/3$. (Ответ: $x - 2y + 4 = 0$, $4x + 2y + 1 = 0$).

📖 См. правила 6 и 7.

ОТВЕТЫ

1.1. Для функции $y = \sqrt{x}$ приращение $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$.

1.2. Если $y = \sqrt{x}$, то $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$.

1.3. При непосредственной подстановке $\Delta x = 0$ в $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$ получаем неопределенность $[0/0]$.

1.4. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$.

1.5. Если $y = \sqrt{x}$, то $y' = 1/2\sqrt{x}$.

2.1. Для функции $y = \sin x$ приращение $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$.

2.2. Если $y = \sin x$, то $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$.

2.3. При непосредственной подстановке $\Delta x = 0$ в $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$ получаем неопределенность $[0/0]$.

2.4. Преобразованное выражение имеет вид:

$$y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x + \Delta x/2)}{2} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x/2) \cdot 1$$

2.5. Если $y = \sin x$, то $y' = \cos x$.

3.1. Используя правила дифференцирования, производную функции $y = \dfrac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} - 4$ следует вычислять следующим образом: $y' = \dfrac{1}{3}(x^3)' + 2(\sqrt{x})' + \left(\dfrac{1}{x}\right)' + (-4)'$. Верны первые два варианта.

3.2. $(x^3)' = 3x^2$.

3.3. $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = 1/(2\sqrt{x})$.

3.4. $(1/x)' = (x^{-1})' = -1/x^2$.

3.5. $(-4)' = 0$.

3.6. Учитывая, что $y' = \frac{1}{3}(x^3)' + 2(\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{x}\right)' + (-4)'$, и подставив сюда найденные производные, имеем окончательный ответ:

$$y' = \frac{1}{3}(3x^2) + 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 0 = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}.$$

4.1. Для нахождения производной функции $y = (x^3 + 3\sqrt[3]{x} + 1)\cdot 3^x$ необходимо воспользоваться правилом $(uv)' = u'v + uv'$, т.е. $y' = (x^3 + 3\sqrt[3]{x} + 1)' \cdot 3^x + (x^3 + 3\sqrt[3]{x} + 1)(3^x)'$.

4.2. Получили производную первого множителя:

$$(x^3 + 3\sqrt[3]{x} + 1)' = (x^3)' + 3\cdot(x^{1/3})' + (1)' = 3x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

4.3. Производная второго множителя $(3^x)' = 3^x \ln 3$.

4.4. Учитывая, что $y' = (x^3 + 3\sqrt[3]{x} + 1)' \cdot 3^x + (x^3 + 3\sqrt[3]{x} + 1)(3^x)'$, подставляем найденные производные и получаем окончательный ответ: $y' = (3x^2 + 1/\sqrt[3]{x^2})\cdot 3^x + (x^3 + 3\sqrt[3]{x} + 1)\cdot 3^x \ln 3$.

5.1. Необходимо воспользоваться правилом

$$(u/v)' = (u'v - uv')/v^2,$$

т. е. $y' = \dfrac{(\operatorname{arctg} x)'(1+x^2) - (1+x^2)' \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}$.

5.2. $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$.

5.3. Производная знаменателя $(1+x^2)' = 2x$.

5.4. Учитывая правило дифференцирования дроби

$$y' = \frac{(\operatorname{arctg} x)'(1+x^2) - (1+x^2)' \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2},$$

подставляем найденные производные и получаем окончательный ответ: $y' = \dfrac{\frac{1}{1+x^2}(1+x^2) - 2x\operatorname{arctg}x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1 - 2x\operatorname{arctg}x}{(1+x^2)^2}$.

6.1. $y' = (\sin x)' \operatorname{tg} x + \sin x (\operatorname{tg} x)' + \dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}$.

6.2. $(\sin x)' = \cos x$.

6.3. $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$.

6.4. $(\cos x)' = -\sin x$.

6.5. Подставляя найденные производные в

$$y' = (\sin x)' \operatorname{tg} x + \sin x (\operatorname{tg} x)' + \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x},$$

вычисляем искомую производную $y' = \cos x \operatorname{tg} x + \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + \dfrac{(-\sin x)}{\cos^2 x}$.

После преобразования получаем окончательно: $y' = \sin x$.

7.1. Функция $y = \sin^3 x$ представляется в виде цепочки элементарных функций: $y = u^3$, $u = \sin x$.

7.2. Чтобы вычислить производную сложной функции $y = \sin^3 x$, необходимо воспользоваться правилом $y'_x = y'_u u'_x$, где $y = u^3$, $u = \sin x$.

7.3. $y'_u = (u^3)' = 3u^2$.

7.4. $u'_x = (\sin x)' = \cos x$.

7.5. Окончательно получаем:

$$y = u^3, \quad u = \sin x;$$

$$y'_x = y'_u u'_x = 3u^2 \cos x \Rightarrow y' = 3\sin^2 x \cos x.$$

8.1. Для вычисления производной сложной функции необходимо ее представить цепочкой составляющих функций, каждую из которых можно продифференцировать, пользуясь табличными формулами и правилами дифференцирования.

8.2. $y = 2^u$, $u = x/\ln x$.

8.3. Чтобы вычислить производную сложной функции $y = 2^{x/\ln x}$, необходимо воспользоваться правилом $y'_x = y'_u u'_x$.

8.4. $y'_u = (2^u)' = 2^u \ln 2$.

8.5. $u'_x = (x/\ln x)' = (\ln x - 1)/\ln^2 x$.

8.6. Подставляя полученные результаты в формулу $y'_x = y'_u u'_x$, вычисляем искомую производную:

$$y'_x = (2^u \ln 2) \cdot \left(\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\right) = 2^{x/\ln x} \ln 2 \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$$

9.1. Получили цепочку $y = \operatorname{ctg} u$, $u = \ln v$, $v = 3x - x^2$ из трех «звеньев», каждое из которых можно продифференцировать по таблице.

9.2. Если $y = f(u)$, $u = g(v)$, а $v = \varphi(x)$, то $y'_x = y'_u u'_v v'_x$.

9.3. $y'_u = -1/\sin^2 u$.

9.4. $u'_v = 1/v$.

9.5. $v'_x = 3 - 2x$.

9.6. Окончательно получаем:

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = -\frac{1}{\sin^2 u} \frac{1}{v}(3 - 2x).$$

Подставляем $v = 3x - x^2$ и $u = \ln v = \ln(3x - x^2)$.

$$y'_x = -\frac{1}{\sin^2 \ln(3x - x^2)} \frac{3 - 2x}{3x - x^2}.$$

10.1. Необходимо использовать правила дифференцирования сложной функции и дифференцирования произведения двух функций.

10.2. $y' = y'_1 y_2 + y_1 y'_2$.

10.3. $(y_1)'_x = -x/\sqrt{1 - x^2}$.

10.4. $y'_2 = -\dfrac{2\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

10.5. $y' = -\dfrac{x \arccos^2 x}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{2\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} \sqrt{1 - x^2} =$

$$= -\frac{x \arccos^2 x}{\sqrt{1 - x^2}} - 2\arccos x.$$

11.1. Производная второго порядка функции $y = f(x)$ есть производная от производной первого порядка этой функции.

11.2. Производная функции $y = \sin^2 x$

$$y' = 2\sin x \cos x \text{ или } y' = \sin 2x.$$

11.3. $y'' = (y')' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$.

12.1. Функция $y(x)$, представленная уравнением $y^3 + x^3 - 3axy - 3 = 0$, называется заданной неявно.

12.2. Для вычисления dy/dx функции $y(x)$, заданной уравнением $y^3 + x^3 - 3axy - 3 = 0$, следует продифференцировать обе части данного уравнения по переменной x, т. е.

$$\frac{d}{dx}\left(y^3 + x^3 - 3axy - 3\right) = \frac{d0}{dx}.$$

12.3. $\dfrac{dy^3}{dx} = 3y^2 y'$.

12.4. $\dfrac{d(3axy)}{dx} = 3a(y + xy')$.

12.5. $y^2 y' + x^2 - ay - axy' = 0$.

12.6. $dy/dx = y' = (ay - x^2)/(y^2 - ax)$.

13.1. Для вычисления производной dy/dx, заданной неявно уравнением $y^2 + 2\ln y = x^4$, следует продифференцировать обе его части по переменной x.

13.2. $\dfrac{d}{dx}\left(y^2 + 2\ln y\right) = \dfrac{dx^4}{dx} \Rightarrow 2yy' + \dfrac{2}{y} y' = 4x^3$.

13.3. $dy/dx = y' = (2x^3 y)/(y^2 + 1)$.

13.4. $y'(-1,\ 1)=\left.\dfrac{2x^3y}{y^2+1}\right|_{\substack{x=-1\\y=1}}=-1$.

14.1. Дифференцируем обе части уравнения

$2\mathrm{arctg}(y/x)=\ln\left(x^2+y^2\right)$, помня, что $y=y(x)$.

14.2. $\dfrac{2}{1+(y/x)^2}\dfrac{y'x-y}{x^2}=\dfrac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$.

14.3. Из равенства $\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\dfrac{y'x-y}{x^2}=\dfrac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$ получаем производную первого порядка $dy/dx=y'=(x+y)/(x-y)$.

14.4. Так как $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$, а в выражение $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$ входят x и y, то следует продифференцировать обе его части по x, учитывая, что $y=y(x)$.

14.5. Продифференцировав обе части выражения $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$ и учитывая, что $y=y(x)$, получили $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-2y+2xy'}{(x-y)^2}$.

14.6. Подставив в $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ определенную ранее $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$, окончательно получаем: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-2y+2x\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)}{(x-y)^2}=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{(x-y)^3}$.

15.1. Продифференцировав равенство

$$x^4+y^4+2x-2y+2=0,$$

задающее неявно функцию $y=y(x)$, имеем

$$4x^3+4y^3\cdot y'+2-2y'=0.$$

15.2. $y'(M)=1$.

15.3. Продифференцировав обе части равенства

$$4x^3+4y^3y'+2-2y'=0,$$

получим:

$$12x^2+12y^2\left(y'\right)^2+4y^3y''-2y''=0.$$

15.4. $y''(M)=-12$.

15.5. Проще продифференцировать по x обе части равенства $6x^2+6y^2\left(y'\right)^2+2y^3y''-y''=0$.

15.6. $12x^2+12y\left(y'\right)^3+18y^2y'y''+2y^3y'''-y'''=0$.

15.7. Подставив в равенство

$$12x^2+12y\left(y'\right)^3+18y^2y'y''+2y^3y'''-y'''=0$$

$x=-1$, $y=1$, $y''=-12$, получаем окончательно: $y'''(M)=216$.

16.1. $y=(\sin 3x)^{\sqrt{x}}$ является показательно-степенной функцией.

16.2. Для вычисления производной функции $y=(\sin 3x)^{\sqrt{x}}$ необходимо предварительное логарифмирование.

16.3. После логарифмирования заданной функции получим $\ln y=\sqrt{x}\ln\sin 3x$.

16.4. Для вычисления производной функции, заданной равенством $\ln y=\sqrt{x}\ln\sin 3x$, необходимо продифференцировать по x обе части этого равенства, помня, что $y=y(x)$.

16.5. $\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{\ln\sin 3x}{2\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\mathrm{ctg}3x$.

16.6. Умножая предыдущий ответ на y и подставляя выражение для y, данное в условии задачи, получаем окончательно:

$$y'=(\sin 3x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln\sin 3x}{2\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\mathrm{ctg}3x\right).$$

17.1. Множитель $\sqrt[x]{2x-1}$ не позволяет вычислить производную функции $y=\left(x\sqrt[x]{2x-1}\right)/e^x$ без предварительного логарифмирования.

17.2. После логарифмирования данной функции получили равенство: $\ln y=\ln x+\dfrac{1}{x}\ln(2x-1)-x$ (учитывая, что $\ln e=1$).

17.3. Продифференцировав по x обе части равенства $\ln y = \ln x + \frac{1}{x}\ln(2x-1) - x$, получаем:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ln(2x-1) + \frac{2}{x(2x-1)} - 1.$$

17.4. Умножая обе части на $y = \left(x\sqrt[x]{2x-1}\right)/e^x$, получаем окончательно: $y' = \frac{\sqrt[x]{2x-1}}{e^x}\left(1 - \frac{\ln(2x-1)}{x} + \frac{2}{2x-1} - x\right).$

18.1. Функция $y(x)$, определяемая уравнениями

$$\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \ln(t+1), \end{cases}$$

называется параметрически заданной.

18.2. Для дифференцирования функции, заданной параметрически, необходимо воспользоваться формулой: $y'_x = y'_t / x'_t$.

18.3. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1/(1+t)}{2(t+1)} = \frac{1}{2(t+1)^2}$.

19.1. Производная первого порядка функции

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \left(\frac{2t}{t^2+1}\right) \Big/ \left(\frac{1}{t^2+1}\right) = 2t.$$

19.2. Так как производная первого порядка есть функция, заданная параметрически:

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y'_t = 2t, \end{cases},$$

а производная второго порядка есть производная функции (y'_x) по переменной x, то для вычисления $y''_{xx} = (y'_x)'_x$ необходимо воспользоваться соответствующей формулой.

19.3. Если $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y'_t = 2t, \end{cases}$, то $y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

19.4. $y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = 2 \Big/ \left(\frac{1}{t^2+1}\right) = 2(t^2+1)$.

Этот ответ можно записать иначе, учитывая, что из условия $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow y''_{xx} = 2/\cos^2 x$.

20.1. Первая производная функции $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

20.2. Так как $y'_x = f(t)$ есть функция, заданная параметрически:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y'_x = -\operatorname{ctg} t, \end{cases}$$

а $y''_{xx} = d^2y/dx^2 = d(y'_x)/dx$, то для вычисления y''_{xx} необходимо воспользоваться еще раз формулой дифференцирования параметрически заданной функции.

20.3. Если $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y'_x = -\operatorname{ctg} t, \end{cases}$, то $y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

20.4. $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_x} = \left(\frac{1}{\sin^2 t}\right) \Big/ (-a\sin t) = \frac{-1}{a\sin^3 t}$.

21.1. Верен вариант 3. Из чертежа видим, что кривая пересекает ось OX в точке $x_0 = 1$.

21.2. $y - y_0 = k(x - x_0)$.

21.3. В уравнении прямой $y - y_0 = k(x - x_0)$ k — угловой коэффициент.

Точка касания M_0, через которую проходят искомые прямые, известна: $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $M_0(1,0)$.

21.4. Угловой коэффициент связан с производной от функции $y = f(x)$, к графику которой строится касательная.

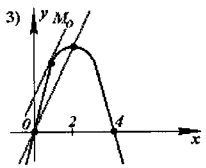
21.5. Угловой коэффициент касательной $k = y'(M_0)$.

21.6. $k_{\text{кас.}} = 1$.

21.7. $k_{\text{норм.}} = -1/k_{\text{кас.}} = -1$.

21.8. Результат вычислений: $M_0(1,\ 0)$; $k_{\text{кас.}}=1$; $k_{\text{норм.}}=-1$. Подставляя их в уравнение $y-y_0=k(x-x_0)$, получаем ответ: уравнение касательной $y=x-1$; уравнение нормали $y=-(x-1)$.

22.1. Верный чертеж:



Уравнение касательной будем составлять в виде $y-y_0=k(x-x_0)$, где $M_0(x_0,y_0)$ — точка касания, k — угловой коэффициент касательной.

22.2. Имеем $k_{\text{кас.}}=k_{y=2x}=2$, так как касательная параллельна прямой $y=2x$.

22.3. Для нахождения точки M_0 используем то, что $y'(M_o)=k_{\text{кас.}}$.

22.4. $y'=4-2x$.

22.5. $x_0=1$.

22.6. Вычисляем $y=4x-x^2$ при $x_0=1$. Получаем $y_0=3$.

22.7. Подставляем все найденные значения в уравнение прямой, проходящей через точку M_0: $y-y_0=k(x-x_0)$; $M_0(1,3)$; $k_{\text{кас.}}=2$. Получаем уравнение искомой касательной:

$$y-3=2(x-1) \quad \text{или} \quad y=2x+1.$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Необходимые сведения

При исследовании поведения функции и построении ее графика целесообразно действовать по следующему плану.

I. ***Найти область определения заданной функции.*** Исходим из того, что область определения функции D_f есть множество тех значений аргумента, при которых функция определена.

Правило 1. В область определения *не могут* входить те значения аргумента, при которых:

1) знаменатель дроби обращается в ноль

$$\left(y = u(x)/v(x) \Rightarrow v(x) \neq 0\right);$$

2) выражение, стоящее под корнем четного порядка, оказывается отрицательным $\left(y = \sqrt[2k]{u(x)} \Rightarrow u(x) \geq 0,\ \ k \in \aleph\right)$;

3) логарифмируемое выражение оказывается отрицательным или равным нулю $\left(y = \log_a u(x) \Rightarrow u(x) > 0\right)$.

Общая область определения сложной функции есть пересечение областей определения составляющих ее выражений.

II. ***Найти точки пересечения графика функции с осями координат.*** Для этого поочередно задаем значения $x = 0$ и $y = 0$ и вычисляем соответствующие им значения x и y.

III. ***Проверить, является ли функция четной или нечетной, периодической.***

Правило 2.1. Говорить о четности или нечетности функции можно только тогда, когда область ее определения D_f симметрична относительно начала координат. При этом:

1) если $f(-x) = f(x)$, то функция четная, ее график симметричен относительно оси OY;

2) если $f(-x) = -f(x)$, то функция нечетная, ее график симметричен относительно начала координат;

3) если $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, то функция общего вида.

Правило 2.2. Если при прибавлении к аргументу некоторого числа, функция не изменяется, то она называется периодической, а наименьшее положительное из таких прибавляемых чисел называется периодом функции.

Необходимо помнить, что:

$\sin(x+2\pi k)=\sin x,\ \ T=2\pi$;

$\cos(x+2\pi k)=\cos x,\ \ T=2\pi$;

$\operatorname{tg}(x+\pi k)=\operatorname{tg} x,\ \ T=\pi$;

$\operatorname{ctg}(x+\pi k)=\operatorname{ctg} x,\ \ T=\pi,\ \ k\in Z$.

График периодической функции строится на отрезке длиной в один период, например $0\le x\le T$, а затем достраивается в D_f переносом параллельно оси OX на соседние отрезки такой же длины.

IV. *Найти асимптоты графика функции (вертикальные, наклонные).*

Определение. Асимптота — это прямая, к которой неограниченно приближается точка графика функции при стремлении хотя бы одной из ее координат к ∞.

Правило 3.1. Вертикальная асимптота может быть в точке разрыва x_0 или на границе области определения функции.

$$\text{Если } \lim_{x\to x_0} f(x)=\begin{cases}\infty, & \text{то асимптота есть } x=x_0,\\ y_0, & \text{то асимптоты нет.}\end{cases}$$

Если вертикальная асимптота есть, то полезно вычислить односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, уточнив, как именно приближается точка графика функции к этой асимптоте.

Возможен случай наличия односторонней вертикальной асимптоты, например: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$, а $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=y_0$.

Правило 3.2. Для отыскания наклонной асимптоты $y=kx+b$ необходимо вычислить пределы:

$$k_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};\quad b_{1,2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-k_{1,2}x\right].$$

Надо иметь в виду, что ряд графиков функций имеет разные наклонные асимптоты при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ (односторонние асимптоты). Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной (при $k=0$).

V. ***Найти интервалы монотонности (возрастания и убывания) функции и точки экстремума.***

Правило 4.

1. Вычислить производную первого порядка.

2. Найти критические точки I рода, т. е. точки, где y' обращается в ноль или не существует (в них может быть экстремум функции, так как здесь выполнено необходимое условие экстремума).

3. На часть числовой оси, соответствующей области определения функции D_f, нанести критические точки и выяснить знаки y' на получившихся интервалах.

Это возможно сделать двумя способами: либо вычислить y' при любом значении x из каждого интервала, определив тем самым знак y', либо разложить y' на элементарные множители и учесть, что множитель в четной степени $(x-x_1)^{2k} \geq 0$, множитель в нечетной степени $(x-x_2)^{2k+1}$ меняет свой знак при переходе через $x = x_2$, а множитель (ax^2+bx+c) с дискриминантом $D<0$ сохраняет свой знак при всех $x \in \Re$ (метод интервалов).

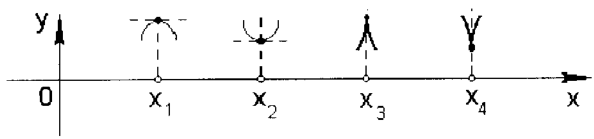
4. Использовать достаточные признаки:

а) на интервале, где $y'>0$, функция возрастает (↗);

б) на интервале, где $y'<0$, функция убывает (↘);

в) в критической точке, при переходе через которую y' меняет знак, функция достигает экстремального значения;

г) если при переходе через критическую точку y' не меняет знак, то экстремума в ней нет, и можно только построить касательную, с которой график функции проходит через эту точку, так как $y'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi_{b\,\text{кас.}}$ $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$ — гладкие экстремумы, $y'(x_4) = -\infty$; $y'(x_3) = \infty$ — острые экстремумы.



Если $y'(x_0)=0$, то касательная к графику функции в точке x_0 горизонтальна.

Если $y'(x_0)=\infty$, то касательная к графику функции в точке x_0 вертикальна.

VI. ***Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз, точки перегиба графика функции.***

Правило 5.

1. Вычислить производную второго порядка.

2. Найти критические точки II рода. В этих точках $y''=\{0;\infty\}$ и может быть перегиб графика функции, так как выполняется необходимое условие точки перегиба.

3. На числовую ось в области определения функции D_f нанести эти точки и выяснить знаки y'' на полученных интервалах.

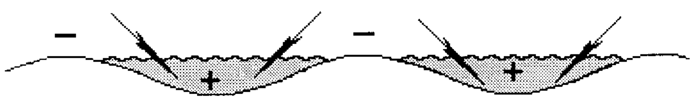
4. Сделать выводы, исходя из достаточных признаков:

а) на интервале, где $y''>0$ — выпуклость вниз ($\cup$),

б) на интервале, где $y''<0$ — выпуклость вверх ($\cap$),

в) критическая точка, при переходе через которую y'' меняет знак, является точкой перегиба (т.п.).

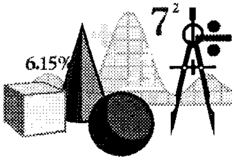
Знак y'' и характер выпуклости связаны «правилом дождя»:



VI. ***Полученные характерные точки, асимптоты нанести на систему координат и построить график.***

Для уточнения можно найти несколько дополнительных точек графика.

В зависимости от вида функций (их сложности) предложенная схема может быть дополнена.



Задача 1

Найти область определения функции $y=\dfrac{\log_2(x+2)}{\sqrt{x^2-2x-3}}$.

1.1. Найдите область определения числителя $\log_2(x+2)$. Укажите верный ответ:

☞ $x\in(-2,+\infty)$;

☞ $x\in(-\infty,+\infty)$;

☞ $x\in(-1,+\infty)$.

🕮 См. правило 1, п. 3.

1.2. Найдите область определения знаменателя $\sqrt{x^2-2x-3}$. Укажите верный ответ:

☞ $x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$;

☞ $x=[-1;\ 3]$.

🕮 См. правило 1, п. 2. Найдите корни уравнения $x^2-2x-3=0$ и решите неравенство $x^2-2x-3\geq 0$.

1.3. Укажите область определения функции $y=\dfrac{\log_2(x+2)}{\sqrt{x^2-2x-3}}$:

☞ $x\in(-\infty,+\infty)$;

☞ $x\in(-2,-1)\cup(3,+\infty)$;

☞ $x\in(-2,-1]\cup[3,+\infty)$.

🕮 См. правило 1, п. 1 и 2.

Задача 2

Определите, является ли функция $y=\sqrt[3]{x^3-1}-\sqrt[3]{x^3+1}$ четной, нечетной или она общего вида?

2.1. Найдите область определения функции $y=\sqrt[3]{x^3-1}-\sqrt[3]{x^3+1}$. Укажите верный ответ:

☞ $x\in(-\infty,+\infty)$;

☞ $x\in[1,+\infty)$;

☞ $x\in[-1,+\infty)$.

🕮 См. правило 1.

2.2. Вычислите $f(-x)$, если $f(x)=\sqrt[3]{x^3-1}-\sqrt[3]{x^3+1}$. Укажите верный ответ:

☞ $f(-x)=-\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{x^3-1}$;

☞ $f(-x)=-\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{x^3+1}$.

🕮 Подставьте $(-x)$ вместо x.

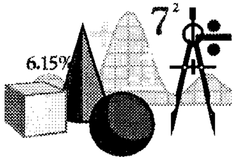
2.3. Какой оказалась данная функция? Укажите верный ответ:

☞ нечетной;

☞ четной;

☞ общего вида.

🕮 См. правило 2.1. Сравните между собой $f(x)$ и $f(-x)$.



Задача 3

Определите, является ли функция $y = \ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$ четной, нечетной или общего вида?

3.1. Найдите область определения функции $y = \ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$. Укажите верный ответ:

☞ $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$;

☞ $x \in (1, +\infty)$;

☞ $x \in (-1, 1)$.

📖 См. правило 1, п. 1 и 3.

3.2. Вычислите $f(-x)$, если $f(x) = \ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$. Укажите верный ответ:

☞ $f(-x) = \ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$;

☞ $f(-x) = -\ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$.

📖 Подставьте $(-x)$ вместо x и воспользуйтесь свойством $\ln A^k = k \ln A$.

3.3. Укажите, какой оказалась данная функция:

☞ четной;

☞ нечетной;

☞ общего вида.

📖 Сравните между собой $f(x)$ и $f(-x)$. См. правило 2.1.

Задача 4

Найдите асимптоты графика функции $y=(x^2-1)/(x+2)$.

4.1. Найдите область определения функции $y=(x^2-1)/(x+2)$. Укажите верный ответ:

☞ $x\in(-\infty,+\infty)$; ☞ $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$;

☞ $x\in(-2,+\infty)$.

🕮 См. правило 1, п. 1.

4.2. Укажите, может ли график этой функции иметь вертикальную асимптоту и где:

☞ может в точках $x=\pm 1$; ☞ может в точке $x=-2$;

☞ не может.

🕮 См. правило 3.1.

4.3. Вычислите $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$, где $f(x)=\left[(x^2-1)/(x+2)\right]$, сделайте вывод о наличии асимптоты. Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\infty$ — асимптоты нет;

☞ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\infty$ — асимптота $x=-2$;

☞ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=1$ — асимптоты нет.

🕮 См. правило 3.1.

4.4. Найдите наклонные асимптоты графика данной функции $y=kx+b$, вычислите коэффициент k и укажите верный ответ:

☞ $k_{1,2}=\infty$ — асимптоты нет; ☞ $k_1=1$; $k_2=-1$; ☞ $k_{1,2}=1$.

🕮 См. правило 3.2.

4.5. Вычислите коэффициент b . Укажите верный ответ:

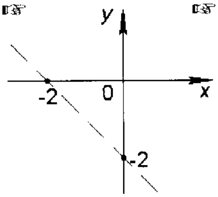
☞ $b_{1,2} = -2$; ☞ $b_{1,2} = 2$; ☞ $b_{1,2} = \infty$ — асимптоты нет.

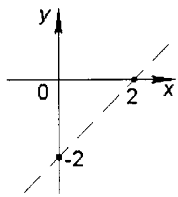
📖 См. правило 3.2.

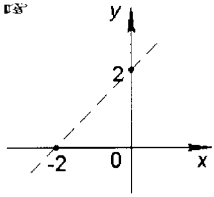
4.6. Составьте уравнение наклонной асимптоты. Укажите верный ответ:

☞ $y = x - 2$; ☞ $y = x + 2$; ☞ $y = 2x$.

4.7. Постройте наклонную и вертикальную асимптоты и укажите верный ответ:

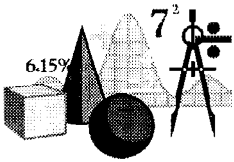
☞ 

☞ 

☞ 

📖 Постройте прямую по двум точкам:

$$x_1 = 0,\ \ y_1 = ?,\quad y_2 = 0,\ \ x_2 = ?$$



Задача 5

Выясните, является ли прямая $x = 0$ вертикальной асимптотой графика функции $y = x \ln x$.

5.1. Найдите область определения функции $y = x \ln x$. Укажите верный ответ:

☞ $D_f = \Re^+$ или $x \in (0, +\infty)$; ☞ $D_f = \Re$; ☞ $D_f = \Re / \{0\}$.

📖 См. правило 1, п. 3.

5.2. Может ли в точке $x=0$ быть вертикальная асимптота. Укажите верный ответ:

☞ не может быть; ☞ может быть.

🕮 См. правило 3.1.

5.3. Вычислите $\lim\limits_{x\to+0} f(x)$, где $f(x)=x\ln x$. Подставьте непосредственно $x=+0$. Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x=[0\cdot\infty]$ — неопределенность;

☞ $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x=[0\cdot 0]=0$; ☞ $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x=[0\cdot\infty]=0$.

🕮 Вспомните, что $\lim\limits_{x\to+0} \ln x=-\infty$.

5.4. Укажите, как вы предлагаете избавиться от нее:

☞ воспользоваться тем, что при $x\to 0$ $\ln x\approx x$;

☞ свести к правилу Лопиталя.

🕮 Утверждение $\ln x\approx x$ при $x\to 0$ неверно.

5.5. Укажите, как воспользоваться правилом Лопиталя при вычислении $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$:

☞ $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x=\lim\limits_{x\to+0}(x)'(\ln x)'$;

☞ $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x}{(\ln x)^{-1}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{(x)'}{(\ln^{-1}x)'}$;

☞ $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{x^{-1}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{(\ln x)'}{(x^{-1})'}$.

5.6. Вычислите этот предел. Укажите верный ответ:

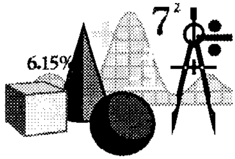
☞ ∞; ☞ -0; ☞ 1.

🕮 Найдите предел отношения производных числителя и знаменателя.

5.7. Является ли прямая $x=0$ вертикальной асимптотой? Укажите верный ответ:

☞ является; ☞ не является.

🕮 См. правило 3.1.



Задача 6

Найдите интервалы возрастания, убывания и точки экстремума функции $y=\sqrt[3]{x^2}-x/3$.

Отметим, что $D_f=\Re$.

6.1. Вычислите производную первого порядка. Укажите верный ответ:

☞ $\left(1-\sqrt[3]{x_4}\right)/3\sqrt[3]{x_4}$;

☞ $\left(2-\sqrt[3]{x}\right)/3\sqrt[3]{x}$;

☞ $\left(2-3\sqrt[3]{x}\right)/3\sqrt[3]{x}$.

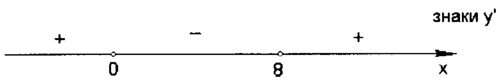
См. таблицу производных и правила дифференцирования.

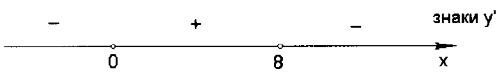
6.2. Найдите критические точки I рода. Укажите верный ответ:

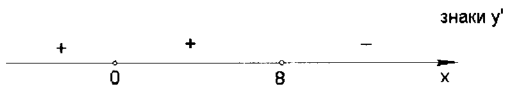
☞ $x_1=2,\ x_2=0$; ☞ $x_1=\sqrt[3]{2},\ x_2=0$; ☞ $x_1=8,\ x_2=0$.

См. правило 4, п. 1 и 2.

6.3. Определите знак y' на всех получившихся интервалах и укажите верный ответ:

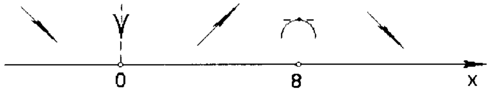
☞ 

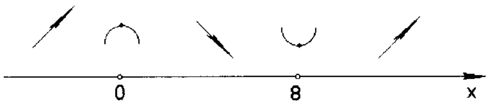
☞ 

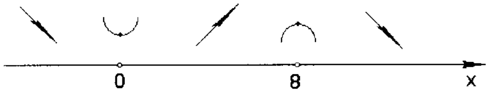
☞ 

См. правило 4, п. 3а.

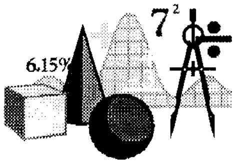
6.4. Укажите интервалы возрастания, убывания, точки экстремума:

☞


☞


☞


📖 См. правило 4, п. 4.



Задача 7

Исследуйте поведение функции $y=(x-4)\sqrt[3]{x}$ по производной второго порядка в точке $x=0$ и ее окрестности.

7.1. Вычислите производную первого порядка функции $y=(x-4)\sqrt[3]{x}$. Укажите верный ответ:

☞ $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; ☞ $y'=\dfrac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$; ☞ $y'=\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}-x+4}{3\sqrt[3]{x}}$.

📖 Используйте: $(uv)'=u'v+uv'$.

7.2. Вычислите производную второго порядка функции $y=(x-4)\sqrt[3]{x}$. Укажите верный ответ:

☞ $y''=\dfrac{4}{9}\dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x^5}}$; ☞ $y''=\dfrac{4}{9}\dfrac{3x-2}{\sqrt[3]{x^5}}$; ☞ $y''=\dfrac{4}{9}\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$.

📖 Используйте: $(u/v)=(uv-uv)/v^2$.

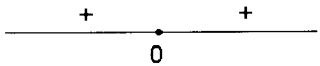
7.3. Является ли точка $x = 0$ критической точкой II рода? Укажите верный ответ:

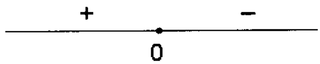
☞ является;

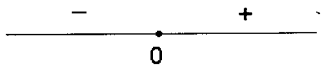
☞ не является.

🕮 См. правило 5, п. 2.

7.4. Определите знаки y'' в окрестности точки $x = 0$. Укажите верный ответ:

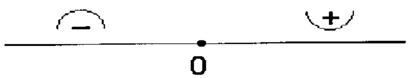
☞ 

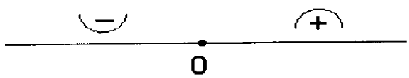
☞ 

☞ 

🕮 См. правило 4, п. 3а.

7.5. Выясните интервалы выпуклости вверх и вниз. Укажите верный ответ:

☞ 

☞ 

🕮 См. правило 5, п. 4 (правило «дождя»).

7.6. Является ли точка $x = 0$ точкой перегиба? Укажите верный ответ:

☞ является;

☞ не является.

🕮 См. правило 5, п. 4.

Задача 8

Исследуйте функцию $y = x^3/(x-1)^2$ и постройте ее график.

8.1. Найдите область определения функции $y = x^3/(x-1)^2$ и укажите верный ответ:

☞ $x \subset (-\infty, +\infty)$; ☞ $x \subset (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$;

☞ $x \subset (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (0, +\infty)$.

См. правило 1, п. 1.

8.2. Найдите координаты точек пересечения функции с осями координат. Укажите верный ответ:

☞ $(0,\ 0)$ и $(1,\ 0)$; ☞ $(0,\ 0)$.

Для $x = 0$ определите соответствующее значение y, а затем для $y = 0$ — соответствующее значение x.

8.3. Обладает ли эта функция свойством четности или нечетности? Вычислите $y(-x)$ и укажите верный ответ:

☞ $y(-x) = -\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$; ☞ $y(-x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$; ☞ $y(-x) = -\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

Вместо x подставьте $(-x)$.

8.4. Каким свойством обладает данная функция? Укажите верный ответ:

☞ четности; ☞ нечетности; ☞ общего вида.

Сравните $y(-x)$ и $y(x)$. См. правило 2.1.

8.5. Определите, может ли график этой функции иметь вертикальную асимптоту и, если может, то, где именно. Укажите верный ответ:

☞ не может; ☞ может в точке $x = 1$;

☞ может в точке $x = 0$.

См. правило 3.1.

8.6. Проверьте, имеет ли график функции $y = x^3/(x-1)^2$ действительно асимптоту в точке $x = 1$? Для этого вычислите односторонние пределы: $A = \lim\limits_{x \to 1-0} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x \to 1+0} f(x)$. Укажите верный ответ:

☞ $A = B = 1$, асимптоты нет;

☞ $A = -\infty$; $B = +\infty$, асимптота $x = 1$;

☞ $A = +\infty$; $B = +\infty$, асимптота $x = 1$.

🕮 См. задачу 4.

8.7. Имеет ли график функции $y = x^3/(x-1)^2$ наклонную асимптоту $y = kx + b$? Укажите верный ответ:

☞ $k = \infty$, асимптоты нет; ☞ $k = 1$, $b = 2 \Rightarrow y = x + 2$;

☞ $k = 1$, $b = -2 \Rightarrow y = x - 2$.

🕮 См. правило 3.2.

8.8. Исследуйте заданную функцию по производной первого порядка и вычислите y'. Укажите верный ответ:

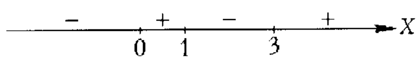
☞ $y' = \dfrac{x^2(5x-3)}{(x-1)^3}$; ☞ $y' = \dfrac{3x^3 - 3x^2 - 2}{(x-1)^3}$; ☞ $y' = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$.

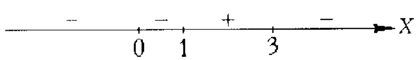
8.9. Найдите и укажите критические точки I рода:

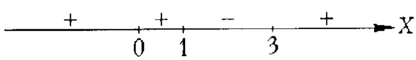
☞ $x = \{0; 1; 3\}$; ☞ $x = \{0; 3\}$; ☞ $x = \{1\}$.

🕮 См. правило 4, п. 2.

8.10. Нанесите критические точки $x = \{0; 1; 3\}$ на числовую ось. Определите знаки y' на получившихся интервалах и укажите верный ответ:

☞ 

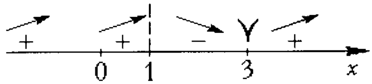
☞ 

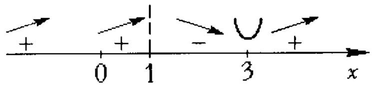
☞ 

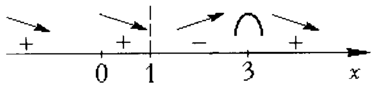
🕮 См. правило 4, п. 3.

8.11. Обозначьте знаком ↗ возрастание функции на интервалах, а знаком ↘ — убывание.

Обозначьте точки соответствующих экстремумов, исключив $x=1$, через которую проходит вертикальная асимптота. Укажите верный ответ:

☞ 

☞ 

☞ 

📖 См. правило 4, п. 4.

8.12. Исследуйте функцию $y = x^3/(x-1)^2$ по производной второго порядка и вычислите y''. Укажите верный ответ:

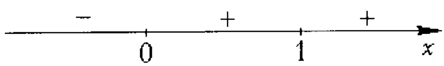
☞ $y'' = \dfrac{6x(x^2-3x+1)}{(x-1)^4}$; ☞ $y'' = \dfrac{6x}{x-1}$; ☞ $y'' = \dfrac{6x}{(x-1)^4}$.

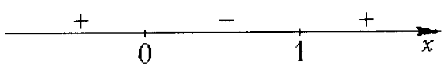
8.13. Найдите и укажите критические точки II рода:

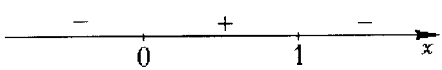
☞ $x=\{0\}$; ☞ $x=\{1\}$; ☞ $x=\{0;1\}$.

📖 См. правило 5, п. 2.

8.14. Нанесите критические точки $x=\{0;1\}$ на числовую ось и определите знаки y'' на получившихся интервалах. Укажите верный ответ:

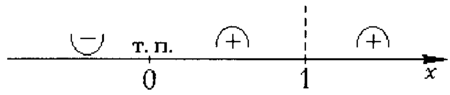
☞ 

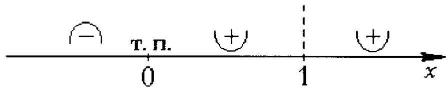
☞ 

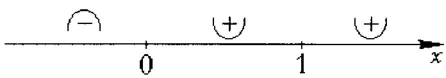
☞ 

📖 См. правило 4, п. 3.

8.15. Обозначьте на интервалах знаком $\cup$ выпуклость кривой вниз, знаком $\cap$ выпуклость кривой вверх, а также точки перегиба (т.п.), исключая $x = 1$. Укажите верный ответ:

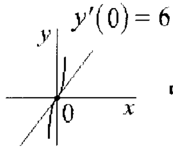
☞ 

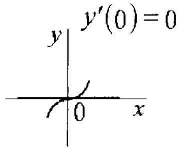
☞ 

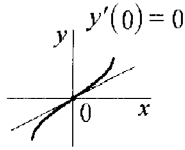
☞ 

См. правило 5, п. 4 (правило «дождя»).

8.16. Вычислите первую производную функции $y = x^3/(x-1)^2$ в точке перегиба и постройте фрагмент кривой в окрестности точки перегиба. Укажите верный ответ:

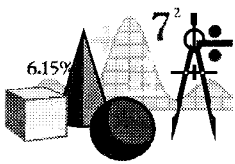
☞ 

☞ 

☞ 

См. правило 4, п. 4г.

8.17. Постройте график функции $y = x^3/(x-1)^2$.



Задача 9

Исследуйте функцию $y = x + \sqrt[3]{x^2}$ и постройте ее график.

9.1. Найдите область определения функции $y = x + \sqrt[3]{x^2}$. Укажите верный ответ:

☞ $x \in (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$; ☞ $x \in (-\infty, +\infty)$; ☞ $x \in [0, +\infty)$.

🕮 См. правило 1.

9.2. Найдите точки пересечения графика с осями координат. Укажите верный ответ:

☞ $(-1,\ 0)$ и $(0,\ 0)$; ☞ $(0,\ 0)$; ☞ $(0,\ 1)$ и $(-1,\ 0)$.

🕮 Приравняйте поочередно $x = 0$ и $y = 0$ и решите полученные уравнения.

9.3. Выясните, обладает ли функция свойством четности или нечетности. Для этого вычислите $y(-x)$ и укажите верный ответ:

☞ $y(-x) = -\left(x + \sqrt[3]{x^2} \right)$; ☞ $y(-x) = -x + \sqrt[3]{x^2}$.

9.4. Укажите, каким свойством обладает функция $y = x + \sqrt[3]{x^2}$:

☞ четности; ☞ нечетности; ☞ общего вида.

🕮 См. правило 2.1.

9.5. Укажите, может ли график этой функции иметь вертикальную асимптоту и где именно:

☞ не может; ☞ может в точке $x = 0$;

☞ может в точках $x = 0$ и $x = 1$.

🕮 См. правило 3.1.

9.6. Выясните, имеет ли график этой функции наклонную асимптоту $y = kx + b$. Укажите верный ответ:

☞ $k = 1,\ b = \infty$, асимптота $y = x$;

☞ $k = 1,\ b = \infty$, асимптоты нет;

☞ $k = \infty$, асимптоты нет.

🕮 См. правило 3.2.

9.7. Исследуйте поведение функции по производной первого порядка и вычислите y' . Укажите верный ответ:

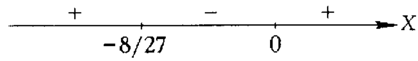
☞ $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} x$; ☞ $y' = \dfrac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x}}$; ☞ $y' = \dfrac{3\sqrt[3]{x} + 2}{3\sqrt[3]{x}}$.

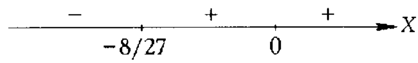
9.8. Найдите критические точки I рода и укажите верный ответ:

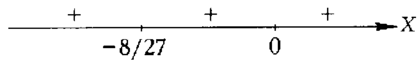
☞ $x = \{0\}$; ☞ $x = \{-8/27;0\}$; ☞ $x = \{-8/27\}$.

🕮 См. правило 4, п. 2.

9.9. Нанесите их на числовую ось. Определите знаки y' на получившихся интервалах и укажите верный ответ:

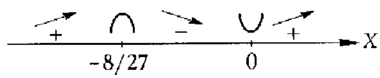
☞ 

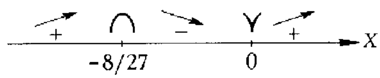
☞ 

☞ 

🕮 См. правило 4, п. 3.

9.10. Обозначьте знаком ↗ возрастание функции $y = x + \sqrt[3]{x^2}$ на интервалах, а знаком ↘ — убывание. Обозначьте точки соответствующих экстремумов. Укажите верный ответ:

☞ 

☞ 

☞ 

🕮 См. правило 4., п. 4.

9.11. Исследуйте функцию $y = x + \sqrt[3]{x^2}$ по производной второго порядка и вычислите y''. Укажите верный ответ:

☞ $y'' = \dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$; ☞ $y'' = \dfrac{2\left(3\sqrt[3]{x^4}+1\right)}{9\sqrt[3]{x^4}}$; ☞ $y'' = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$.

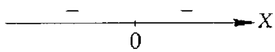
9.12. Найдите и укажите критические точки II рода:

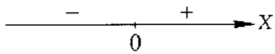
☞ $x = \{0\}$;

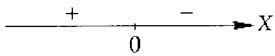
☞ критических точек II рода нет.

📖 См. правило 5, п. 2.

9.13. Нанесите ее на числовую ось и определите знаки y'' на получившихся интервалах. Укажите верный ответ:

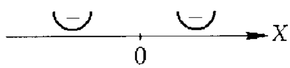
☞ 

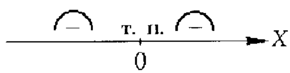
☞ 

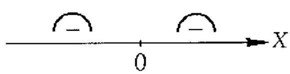
☞ 

📖 См. правило 4, п. 3.

9.14. Обозначьте на интервалах знаком $\cup$ выпуклость кривой вниз, знаком $\cap$ выпуклость вверх, а также точки перегиба (т.п.). Укажите верный ответ:

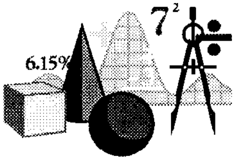
☞ 

☞ 

☞ 

📖 См. правило 5, п. 4 (правило «дождя»).

9.15. Постройте график функции $y = x + \sqrt[3]{x^2}$.



Задача 10

Исследуйте функцию $y = xe^{-x^2/8}$ и постройте ее график.

10.1. Найдите область определения функции $y = xe^{-x^2/8}$. Укажите верный ответ:

☞ $x \in (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$; ☞ $x \in (0,\ +\infty)$;

☞ $x \in (-\infty, +\infty)$.

📖 См. правило 1.

10.2. Выясните, обладает ли функция $y = xe^{-x^2/8}$ свойством четности или нечетности. Для этого вычислите $y(-x)$. Укажите верный ответ:

☞ $y(-x) = -xe^{x^2/8}$; ☞ $y(-x) = -xe^{-x^2/8}$;

☞ $y(-x) = -xe^{x^2/8}$.

📖 Вместо x подставьте $(-x)$.

10.3. Укажите, каким свойством обладает функция $y = xe^{-x^2/8}$:

☞ четности; ☞ нечетности; ☞ общего вида.

📖 Сравните $y(-x)$ и $y(x)$. См. правило 2.1.

10.4. Укажите, обладает ли график этой функции какой-либо симметрией:

☞ график симметричен относительно оси $0X$;

☞ график симметричен относительно оси $0Y$;

☞ график симметричен относительно начала координат;

☞ график не обладает симметрией.

📖 См. правило 2.1.

10.5. Принимая во внимание нечетность данной функции, укажите, каким свойством обладает эта точка:

☞ $x=0$ — точка экстремума;

☞ $x=0$ — точка перегиба;

☞ $x=0$ не является ни точкой экстремума, ни точкой перегиба.

10.6. Укажите, может ли график данной функции иметь вертикальную асимптоту и где:

☞ может в точке $x=0$;

☞ не может.

🕮 См. правило 3.1.

10.7. Выясните, имеет ли график этой функции наклонную асимптоту. Вычислите k и b. Составьте уравнение асимптоты $y=kx+b$ при $x\to+\infty$. Укажите верный ответ:

☞ $k=\infty$ — асимптоты нет;

☞ $k=0,\ b=\infty$ — асимптоты нет;

☞ $k=0,\ b=0$ — асимптота $y=0$.

🕮 См. правило 3.2. При вычислении b используйте правило Лопиталя.

10.8. Исследуйте поведение функции по производной первого порядка и вычислите y'. Укажите верный ответ:

☞ $y'=-\frac{1}{4}e^{-x^2/8}(x-2)(x+2)$;

☞ $y'=\frac{1}{4}e^{-x^2/8}\left(x^2+4\right)$;

☞ $y'=e^{-x^2/8}(x+1)$.

10.9 Найдите и укажите критические точки I рода:

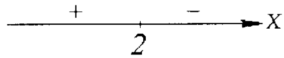
☞ $x=\{0\}$;

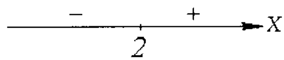
☞ $x=\{-2;\ 0;\ 2\}$;

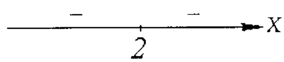
☞ $x=\{-2;\ 2\}$.

🕮 См. правило 4, п. 2.

10.10. В области $x \in [0, +\infty)$, где исследуется функция $y = xe^{-x^2/8}$, нанесите критическую точку $x = 2$ на числовую ось и определите знаки y' на получившихся интервалах. Укажите верный ответ:

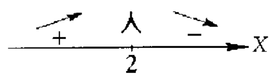
☞ 

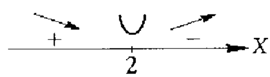
☞ 

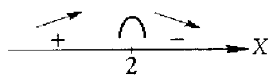
☞ 

📖 См. правило 4, п. 3а.

10.11. На этой же части числовой оси обозначьте знаком ↗ возрастание функции $y = xe^{-x^2/8}$ на интервалах, а знаком ↘ — убывание. Обозначьте точки соответствующих экстремумов. Укажите верный ответ:

☞ 

☞ 

☞ 

📖 См. правило 4, п. 4.

10.12. Исследуйте функцию $y = xe^{-x^2/8}$ по производной второго порядка и вычислите y''. Укажите верный ответ:

☞ $y'' = 1/8\, xe^{-x^2/8}(x-2)$;

☞ $y'' = 1/16\, xe^{-x^2/8}\left(x - 2\sqrt{3}\right)\left(x + 2\sqrt{3}\right)$;

☞ $y'' = -1/16\, xe^{-x^2/8}\left(x^2 + 12\right)$.

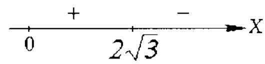
10.13. Найдите и укажите критические точки II рода:

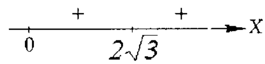
☞ $x = \{-2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}\}$; ☞ $x = \{-2\sqrt{3};\ 0; 2\sqrt{3}\}$;

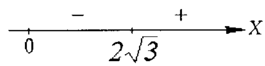
☞ критических точек II рода нет.

📖 См. правило 5, п. 2.

10.14. Нанесите их в рассматриваемой области на числовую ось и определите знаки y'' на получившихся интервалах. Укажите верный ответ:

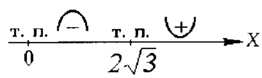
☞ 

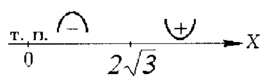
☞ 

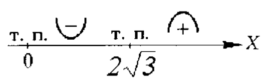
☞ 

📖 См. правило 4, п. 3а.

10.15. На этой же части числовой оси обозначьте на интервалах знаком ∪ выпуклость кривой вниз, знаком ∩ выпуклость вверх, а также точки перегиба (т. п.). Укажите верный ответ:

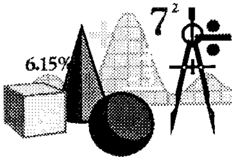
☞ 

☞ 

☞ 

📖 См. правило 5, п. 4.

10.16. Постройте график функции $y = xe^{-x^2/8}$.



Задача 11

Исследуйте функцию $y = x/\ln x$ и постройте ее график.

11.1. Найдите область определения функции $y = x/\ln x$. Укажите верный ответ:

☞ $x \in (-\infty,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$;

☞ $x \in (0,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$;

☞ $x \in (0,\ +\infty)$.

🕮 См. правило 1, п. 1, 3.

11.2. Найдите точки пересечения графика с осями координат. Укажите верный ответ:

☞ $(0,\ 0)$; ☞ $(1,\ 0)$ и $(0,\ 0)$; ☞ точек пересечения нет.

🕮 Возьмите поочередно $x = 0$ и $y = 0$ и найдите соответствующие значения y и x.

11.3. Обладает ли функция $y = x/\ln x$ свойством четности или нечетности? Для этого вычислите $y(-x)$ и укажите верный ответ:

☞ $y(-x) = -x/\ln x$;

☞ $y(-x)$ не существует;

☞ $y(-x) = x/\ln x$.

🕮 См. правило 2.

11.4. Укажите, может ли график функции $y = x/\ln x$ иметь вертикальную асимптоту и где:

☞ может в точках $x = 0$ и $x = 1$;

☞ не может нигде;

☞ может в точке $x = 1$.

🕮 См. правило 3.1.

11.5. Чтобы выяснить наличие асимптоты в точке $x=0$, вычислите $\lim\limits_{x\to+0} y(x)=\lim\limits_{x\to+0}(x/\ln x)$. Укажите верный ответ:

☞ 0; ☞ ∞; ☞ 1.

11.6. Укажите, имеет ли функция $y=x/\ln x$ вертикальную асимптоту в точке $x=0$:

☞ имеет; ☞ не имеет.

📖 См. правило 3.1.

11.7. Вычислите $\lim\limits_{x\to1+0} y(x)$, $\lim\limits_{x\to1-0} y(x)$ и укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x\to1+0} y(x)=1/e$, $\lim\limits_{x\to1-0} y(x)=1/e$;

☞ $\lim\limits_{x\to1+0} y(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0} y(x)=+\infty$;

☞ $\lim\limits_{x\to1+0} y(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0} y(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1\pm0} y(x)=\pm\infty$.

11.8. Укажите, имеет ли график функции $y=x/\ln x$ вертикальную асимптоту в точке $x=1$:

☞ имеет; ☞ не имеет.

📖 См. правило 3.1.

11.9. Имеет ли график функции наклонную асимптоту. Вычислите k и b. Составьте уравнение асимптоты $y=kx+b$ при $x\to+\infty$. Укажите верный ответ:

☞ $k=\infty$ — асимптоты нет;

☞ $k=0,\ b=0$ — асимптота $y=0$;

☞ $k=0,\ b=\infty$ — асимптоты нет.

📖 См. правило 3.2.

11.10. Исследуйте поведение функции по производной первого порядка и вычислите y'. Укажите верный ответ:

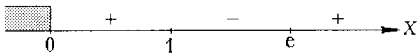
☞ $y'=x$; ☞ $y'=(\ln x-1)/\ln^2 x$; ☞ $y'=(\ln x+1)/\ln^2 x$.

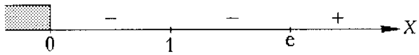
11.11. Найдите и укажите критические точки I рода:

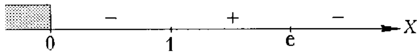
☞ $x=\{0;\ e\}$; ☞ $x=\{e\}$; ☞ $x=\{1;\ e\}$.

📖 См. правило 4, п. 2.

11.12. Определите знаки y' на получившихся интервалах и укажите верный ответ:

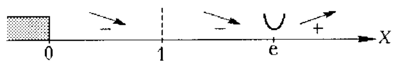
☞ 

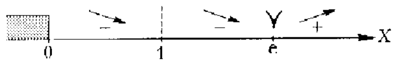
☞ 

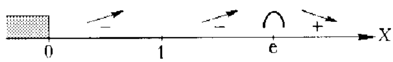
☞ 

📖 См. правило 4, п. 3а.

11.13. Обозначьте знаком ↗ возрастание функции на интервалах, а знаком ↘ — ее убывание, а также точки соответствующих экстремумов, исключая точку $x = 1$, где уже имеется вертикальная асимптота. Укажите верный ответ:

☞ 

☞ 

☞ 

📖 См. правило 4, п. 4.

11.14. Исследуйте функцию $y = x/\ln x$ по производной второго порядка и вычислите y''. Укажите верный ответ:

☞ $y'' = -(\ln x - 2)/(x \ln^3 x)$; ☞ $y'' = (3\ln x - 2)/(x\ln^3 x)$;

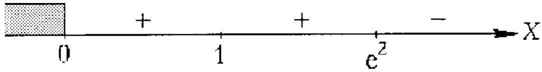
☞ $y'' = 1/(2\ln x)$.

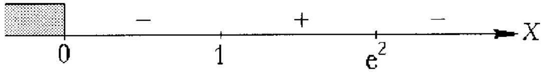
11.15. Найдите и укажите критические точки II рода:

☞ $x = \{0;\ e^2\}$; ☞ $x = \{e^2\}$; ☞ $x = \{1;\ e^2\}$.

📖 См. правило 5, п. 2.

11.16. Нанесите их на числовую ось и определите знаки y'' на получившихся интервалах. Укажите верный ответ:

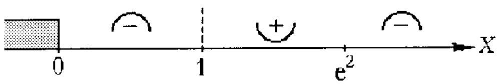
☞ 

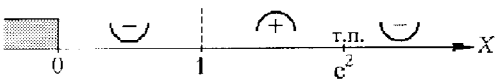
☞ 

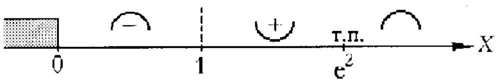
☞ 

📖 См. правило 4, п. 3 а.

11.17. Обозначьте на интервалах знаком $\cup$ выпуклость кривой вниз, знаком $\cap$ выпуклость вверх, а также точки перегиба (т. п.), исключая точку $x = 1$. Укажите верный ответ:

☞ 

☞ 

☞ 

📖 См. правило 5, п. 4.

11.18. Прежде чем построить весь график, выясним, с какой касательной он подходит к граничной точке $x = 0$. Для этого вычислите $\lim\limits_{x\to+0} y' = \lim\limits_{x\to+0} (\ln x - 1)/\ln^2 x$. Укажите верный ответ:

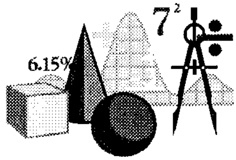
☞ 0;   ☞ ∞ ;   ☞ 1.

11.19. Укажите, как расположена касательная к графику функции $y = x/\ln x$ в точке $x = 0$:

☞ горизонтально;   ☞ вертикально.

📖 См. правило 4, п. 4.

11.20. Постройте график функции $y = \dfrac{x}{\ln x}$.



Задача 12

Исследуйте функцию $y = x\operatorname{arctg} x$ и постройте ее график.

12.1. Найдите область определения функции $y = x\operatorname{arctg} x$ и укажите верный ответ:

☞ $x \in (0, +\infty)$; ☞ $x \in (-\infty, +\infty)$; ☞ $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

📖 См. правило 1.

12.2. Найдите точки пересечения графика с осями координат. Укажите верный ответ:

☞ $(0,0)$; $(1,0)$; ☞ $(0, \pi/2)$; ☞ $(0, -\pi/2)$;

☞ точек перессечения нет.

📖 Возьмите поочередно $x = 0$ и $y = 0$ и найдите соответсвтующие значения y и x.

12.3. Запишите выражение функции при $x = -x$ и укажите верный ответ:

☞ $y(-x) = -x\operatorname{arctg} x$;

☞ $y(-x) = x\operatorname{arctg} x$;

☞ $y(-x) = -x\operatorname{arctg}(-x)$.

📖 $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

12.4. Выясните, является ли функция $y = x\operatorname{arctg} x$ четной, нечетной или это функция общего вида. Укажите верный ответ:

☞ общего вида; ☞ нечетная; ☞ четная.

📖 Сравните $y(-x)$ и $y(x)$. См. правило 2.1.

12.5. Укажите, какой симметрией обладает график данной функции:

☞ о симметрии ничего сказать нельзя;

☞ график симметричен относительно оси OY;

☞ график симметричен относительно оси OX;

☞ график симметричен относительно начала координат.

🕮 См. правило 2.1.

12.6. Точка $(0,\ 0)$ принадлежит графику. Является ли эта точка точкой перегиба или экстремума. Укажите верный ответ:

☞ является точкой перегиба;

☞ является точкой экстремума;

☞ не является ни точкой перегиба, ни точкой экстремума;

☞ об этой точке ничего нельзя сказать.

🕮 Установите, будет ли $x = 0$ критической точкой.

12.7. Укажите, может ли график функции $y = x \operatorname{arctg} x$ иметь вертикальную асимптоту и где:

☞ может в точках $x = 0$;

☞ не может нигде.

🕮 См. правило 3.1.

12.8. Выясните, имеет ли график данной функции наклонную асимптоту. Вычислите k и b. Составьте уравнение асимптоты $y = kx + b$ при $x \to +\infty$. Укажите верный ответ:

☞ $k = \infty$ — асимптоты нет;

☞ $k = \pi/2$, $b = \infty$ — асимптоты нет;

☞ $k = \pi/2$, $b = -1$ — асимптота $y = \pi x/2 - 1$.

🕮 См. правило 3.2.

12.9. Исследуйте поведение функции $y = x \operatorname{arctg} x$ по производной первого порядка и вычислите y'. Укажите верный ответ:

☞ $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$; ☞ $y' = \dfrac{\left(1+x^2\right) \operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}$;

☞ $y' = \dfrac{\left(1+x^2\right) \operatorname{arctg} x + x}{1+x^2}$; ☞ $y' = \dfrac{\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x + x}{\sqrt{1+x^2}}$.

12.10. Найдите и укажите критические точки I рода в области исследования $x \in [0, +\infty)$:

☞ критических точек нет;

☞ $x = 0$.

📖 См. правило 4, п. 2. Уравнение $(1+x^2)\operatorname{arctg} x = -x$ не имеет решения при $x > 0$, так как на этом множестве $\operatorname{arctg} x > 0$.

12.11. Укажите знак y' в области $x \in [0, +\infty)$:

☞ $y' < 0$; ☞ $y' > 0$.

📖 $y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow y < 0$ при $x \in (0, +\infty)$.

12.12. Укажите поведение функции $y = x \operatorname{arctg} x$ в области исследования $x \in (0, +\infty)$:

☞ возрастает (↗);

☞ убывает (↘).

📖 См. правило 4, п. 4.

12.13. Исследуйте по производной второго порядка и вычислите y''. Укажите верный ответ:

☞ $y'' = \dfrac{2}{(1+x^2)^2}$; ☞ $y'' = \dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}$; ☞ $y'' = -\dfrac{(x-1)^2}{2x(1+x^2)}$.

12.14. В области исследования $x \in [0, +\infty)$ найдите и укажите критические точки II рода:

☞ $x = 0$;

☞ таких точек нет.

📖 См. правило 5, п. 2.

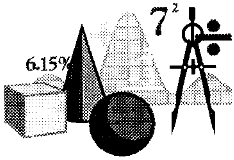
12.15. Кривая на множестве $x \in [0, +\infty)$ выпуклая вверх или вниз? Укажите верный ответ:

☞ кривая имеет выпуклость вниз (∪);

☞ кривая имеет выпуклость вверх (∩).

📖 См. правило 5, п. 4.

12.16. Постройте график функции $y = x \operatorname{arctg} x$.



Задача 13

Исследуйте функцию $y = e^{\operatorname{tg} x}$ и постройте ее график.

13.1. Найдите область определения функции $y = e^{\operatorname{tg} x}$ и укажите верный ответ:

☞ $x \in R$; ☞ $x \in R \setminus \{\pi/2\}$; ☞ $x \in R \setminus \{\pi/2 + \pi k,\ k \in Z\}$.

📖 См. правило 1, необходимо учитывать, что $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$.

13.2. Найдите точки пересечения графика функции с осями координат и укажите верный ответ:

☞ $(0,\ 1)$; ☞ $(0,\ 1)$ и $(\pi k,\ 0), k \in Z$;

☞ точек пересечения нет.

📖 Поочередно подставьте $x = 0$ и $y = 0$ и найдите соответствующие этим условиям y и x.

13.3. Выясните, является ли данная функция четной, нечетной или общего вида и вычислите для этого $y(-x)$. Укажите верный ответ:

☞ $y(-x) = -e^{\operatorname{tg} x}$; ☞ $y(-x) = e^{\operatorname{tg} x}$; ☞ $y(-x) = e^{-\operatorname{tg} x}$.

📖 Подставьте $(-x)$ вместо x и учтите, что $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

13.4. Укажите, какой функцией является $y = e^{\operatorname{tg} x}$:

☞ четной; ☞ нечетной; ☞ общего вида.

📖 См. правило 2.1.

13.5. Укажите, является ли данная функция периодической, и если является, то чему равен ее период T:

☞ является, $T = 2\pi$; ☞ является, $T = T$; ☞ не является.

📖 См. правило 2.2.

13.6. Укажите, может ли график функции иметь вертикальные асимптоты:

☞ может при $x = \pi/2 + \pi k,\ k \in Z$;

☞ может при $x = \pi/2$; ☞ не может.

🕮 См. правило 3.1.

13.7. Проверьте наличие вертикальной асимптоты в точке $x = -\pi/2$ (левая точка выбранного интервала исследования). Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x \to -\pi/2+0} e^{\operatorname{tg} x} = -\infty$ — асимптота есть;

☞ $\lim\limits_{x \to -\pi/2+0} e^{\operatorname{tg} x} = 0$ —асимптота есть;

☞ $\lim\limits_{x \to -\pi/2+0} e^{\operatorname{tg} x} = 0$ — асимптоты нет.

🕮 См. правило 3.1, учитывая, что $\lim\limits_{x \to -\pi/2+0} \operatorname{tg} x = -\infty$.

13.8. Проверьте наличие вертикальной асимптоты в точке $x = \pi/2$ (правая точка рассматриваемого интервала). Укажите верный ответ:

☞ $\lim\limits_{x \to -\pi/2-0} e^{\operatorname{tg} x} = -\infty$ — асимптота есть;

☞ $\lim\limits_{x \to -\pi/2-0} e^{\operatorname{tg} x} = +\infty$ — асимптоты нет;

☞ $\lim\limits_{x \to -\pi/2-0} e^{\operatorname{tg} x} = 0$ — асимптоты нет.

🕮 См. правило 3.1, учитывая, что $\lim\limits_{x \to -\pi/2-0} e^{\operatorname{tg} x} = +\infty$.

13.9. Исследуйте функцию $y = e^{\operatorname{tg} x}$ на множестве $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ по производной первого порядка и вычислите y'. Укажите верный ответ:

☞ $y' = e^{\operatorname{tg} x}$; ☞ $y' = e^{\operatorname{tg} x} \dfrac{1}{\cos^2 x}$; ☞ $y' = -e^{\operatorname{tg} x} \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

13.10. Найдите критические точки I рода, принадлежащие интервалу $(-\pi/2,\ \pi/2)$. Укажите верный ответ:

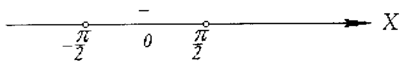
☞ критических точек нет;

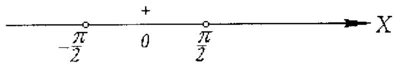
☞ $x = 0$;

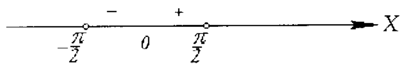
☞ $x = \{-\pi/4; \pi/4\}$.

См. правило 4.2.

13.11. Определите знак $y' = e^{\operatorname{tg} x} \dfrac{1}{\cos^2 x}$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ и укажите верный ответ:

☞ 

☞ 

☞ 

Функция $y = e^{\operatorname{tg} x}$ всегда положительна!

13.12. Укажите характер монотонности функции на данном интервале:

☞ функция возрастает (↗);

☞ функция убывает (↘).

См. правило 4.4.

13.13. Исследуйте функцию $y = e^{\operatorname{tg} x}$ по производной второго порядка и вычислите y''. Укажите верный ответ:

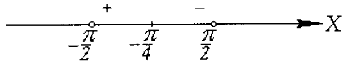
☞ $y'' = e^{\operatorname{tg} x} \dfrac{1}{\cos^4 x}$; ☞ $y'' = e^{\operatorname{tg} x} \dfrac{2\sin x}{\cos^5}$; ☞ $y'' = e^{\operatorname{tg} x} \dfrac{1+\sin 2x}{\cos^4 x}$.

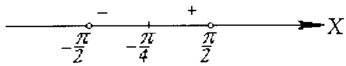
13.14. Найдите критические точки II рода, принадлежащие $(-\pi/2, \pi/2)$. Укажите верный ответ:

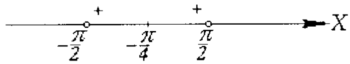
☞ $x = -\pi/4$; ☞ критических точек нет; ☞ $x = 0$.

См. правило 5.2.

13.15. Нанесите ее на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$ и выясните знаки y''. Укажите верный ответ:

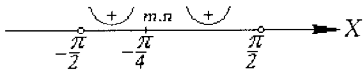
☞ 

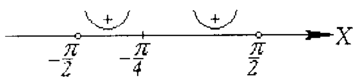
☞ 

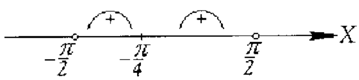
☞ 

📖 См. правило 4, п.3.

13.16. Выясните характер выпуклости кривой на этом интервале и наличие точки перегиба. Укажите верный ответ:

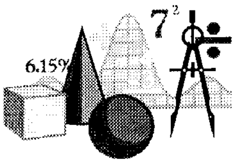
☞ 

☞ 

☞ 

📖 См. правило 5, п.4.

13.17. Постройте график функции $y = e^{\operatorname{tg} x}$.



Задача 14

Исследуйте функцию $y = x + \sin x$ и постройте ее график.

14.1. Найдите область определения функции $y = x + \sin x$. Укажите верный ответ:

☞ $x\in(-\infty,+\infty)$; ☞ $x\in(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$; ☞ $x\in[0,2\pi]$

📖 См. правило 1.

14.2. Найдите точки пересечения графика функции $y=x+\sin x$ с осями координат. Укажите верный ответ:

☞ $(\pi k,\ 0),\ k\in Z$; ☞ $(0,0)$; ☞ $(\pi k,-\pi k),\ k\in Z$.

📖 Возьмите $x=0$, затем $y=0$ и найдите соответствующие значения x и y.

14.3. Проверьте, является ли функция $y=x+\sin x$ четной или нечетной. Для этого вычислите $y(-x)$, упростите. Укажите верный ответ:

☞ $y(-x)=-x+\sin x$; ☞ $y(-x)=-x+\sin(-x)$;

☞ $y(-x)=-x-\sin x$.

📖 $\sin(-x)=-\sin x$.

14.4. Сравните $y(-x)$ и $y(x)$ и укажите, какой является данная функция:

☞ четной; ☞ нечетной; ☞ общего вида.

📖 См. правило 2.1.

14.5. Укажите, каким свойством обладает график нечетной функции:

☞ симметричен относительно оси OY;

☞ симметричен относительно оси OX;

☞ симметричен относительно начала координат.

📖 См. правило 2.1.

14.6. Точка $(0,\ 0)$ принадлежит графику. Что можно сказать о ней?

☞ это точка экстремума;

☞ это точка перегиба;

☞ ничего.

📖 Проверьте, является ли точка (0, 0) критической.

14.7. Укажите, является ли данная функция периодической и, если является, то чему равен период:

☞ является, $T=2\pi$; ☞ не является.

📖 См. правило 2.2.

14.8. Укажите, может ли график функции $y = x + \sin x$ иметь вертикальную асимптоту, и, если может, то где:

☞ может, $x = 0$; ☞ не может.

См. правило 3.1.

14.9. Укажите, может ли график данной функции иметь наклонную асимптоту $y = kx + b$. Вычислите k и b при $x \to +\infty$:

☞ $k = 1$, b — не определен — асимптоты нет;

☞ $k = 1$, $b = \infty$ — асимптоты нет;

☞ $k = 1$, $b = 0$ — асимптота $y = x$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ не определен. $y = \sin x$ — функция ограниченная,

$$|\sin x| \le 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

14.10. Вычислите производную первого порядка от функции $y = x + \sin x$. Укажите верный ответ:

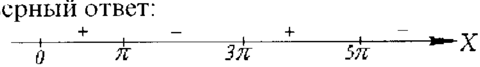
☞ $y' = 1 + \cos x$; ☞ $y' = 1 - \cos x$; ☞ $y' = \sin x + x \cos x$

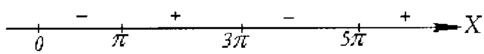
14.11. Найдите критические точки I рода. Укажите верный ответ:

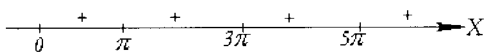
☞ $x = \pi k, k \in Z$; ☞ $x = \pi + \pi k, k \in Z$; ☞ $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$

См. правило 4.2.

14.12. Нанесите критические точки на часть числовой оси $x \in [0, +\infty)$. Определите знаки $y' = 1 + \cos x$ на получившихся интервалах. Укажите верный ответ:

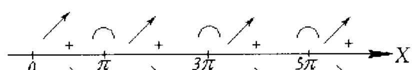
☞ 

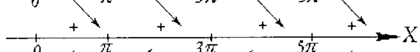
☞ 

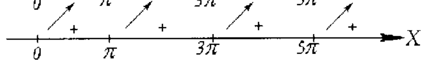
☞ 

$-1 \le \cos x \le 1$.

14.13. Укажите интервалы возрастания (↗), убывания (↘), точки экстремума:

☞ 

☞ 

☞ 

См. правило 4.

14.14. Что можно сказать по поводу того, что $y'(\pi+2\pi k)=0$:

☞ ничего;

☞ график функции проходит через точки $x=\pi+2\pi k$ с горизонтальными касательными;

☞ эти точки должны быть точками экстремума.

📖 См. правило 4, п.4г.

14.15. Вычислите производную второго порядка от функции $y=x+\sin x$. Укажите верный ответ:

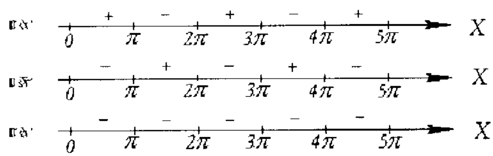
☞ $y''=1-\sin x$; ☞ $y''=-\sin x$; ☞ $y''=\sin x$.

14.16. Найдите критические точки II рода. Укажите верный ответ:

☞ $x=\pi k,\ k\in Z$; ☞ $x=2\pi k,\ k\in Z$; ☞ $x=\pi/2+\pi k,\ k\in Z$.

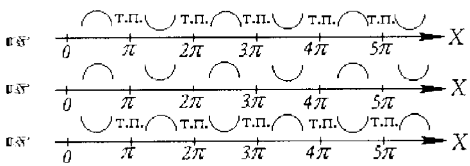
📖 См. правило 5, п.2.

14.17. Нанесите эти точки на часть числовой оси $x\in[0,+\infty)$ и проставьте знаки $y''=-\sin x$ в получившихся интервалах. Укажите верный ответ:



📖 Синус положителен в I и II четвертях и отрицателен — в III и IV.

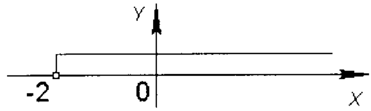
14.18. Укажите интервалы выпуклости вверх $(\cap)$ и вниз $(\cup)$, точки перегиба (т. п.):



📖 См. правило 5, п.4.

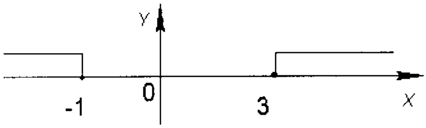
14.19. Постройте график функции $y=x+\sin x$.

1.1. Область определения числителя $x \in (-2, +\infty)$.



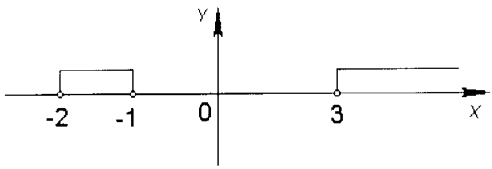
1.2. Область определения знаменателя:

$$x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty).$$



1.3. Область определения всей функции:

$$x \in (-2, -1) \cup (3, +\infty).$$



2.1. Область определения: $x \in (-\infty, +\infty)$ или $D_f = \Re$.

2.2. $f(-x) = -\sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{x^3-1}$.

2.3. $f(x) = \sqrt[3]{x^3-1} - \sqrt[3]{x^3+1}$ — функция четная, так как $f(-x) = f(x)$.

3.1. Область определения D_f симметрична относительно точки 0: $x \in (-1, 1)$. Можно говорить о четности или нечетности данной функции.

3.2. $f(-x) = -\ln\left[(1+x)/(1-x)\right]$.

3.3. $f(x) = \ln\left[(1+x)/(1-x)\right]$ — функция нечетная, так как $f(-x) = -f(x)$.

4.1. Область определения данной функции:

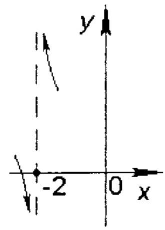
$$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty) \text{ или } D_f = \Re / \{-2\}.$$

4.2. Вертикальная асимптота может быть в точке $x = -2$.

4.3. График имеет вертикальную асимптоту $x = -2$. Для построения эскиза графика, вычислим односторонние пределы, чтобы выяснить, как именно точка кривой приближается к асимптоте при $x \to x_0 + 0$ и $x \to x_0 - 0$:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to -2+0} \frac{x^2 - 1}{x + 2} = \left[\frac{3}{+0} \right] = +\infty,$$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to -2-0} \frac{x^2 - 1}{x + 2} = \left[\frac{3}{-0} \right] = -\infty.$$

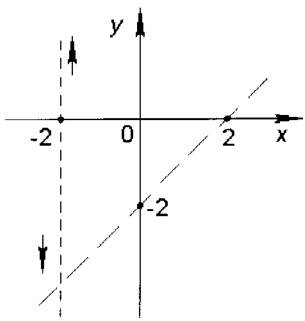


4.4. Коэффициент $k_{1,2} = 1$.

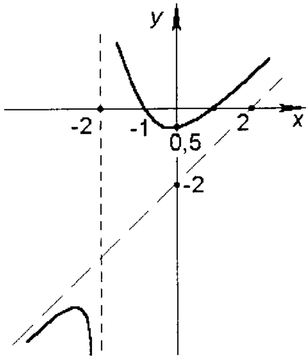
4.5. Коэффициент $b_{1,2} = -2$.

4.6. Составляем уравнение асимптоты $y = kx + b \Rightarrow y = x - 2$.

4.7. Получили две асимптоты: одну вертикальную $x = -2$ и одну наклонную $y = x - 2$.



Если найти точки пересечения с осями координат, то можно уже построить приблизительный эскиз этого графика.



$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$,

$y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

5.1. Область определения $D_f = \Re^+$.

5.2. В точке $x = 0$ может быть вертикальная асимптота.

5.3. Получили неопределенность $[0 \cdot \infty]$.

5.4. Свести к правилу Лопиталя.

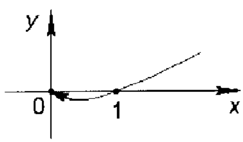
5.5. Выражение, к которому надо применить правило Лопиталя: $\lim\limits_{x \to +0} \left(\ln x / x^{-1}\right)$.

5.6. $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = -0$.

5.7. Прямая $x = 0$ не является вертикальной асимптотой графика функции $y = x \ln x$, так как $\lim\limits_{x \to +0} y \neq \infty$.

В процессе решения мы выяснили, что при $x \to +0$, $y \to -0$, то есть график справа подходит к граничной точке $M_0(+0, -0)$.

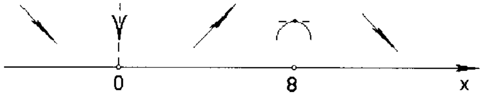
Эскиз:



$y = 0 \Rightarrow x \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$.

6.1. $y' = \left(2 - \sqrt[3]{x}\right) / 3\sqrt[3]{x}$.

6.2. Критические точки I рода: $x_1 = 8$, $x_2 = 0$.

6.3. 

6.4. $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$ — интервалы убывания; $(0, 8)$ — интервал возрастания функции.

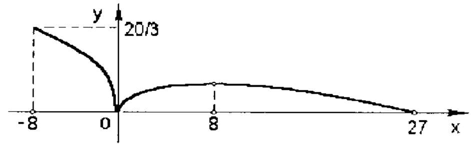
$x = 0$ — точка острого минимума, $y_{\min}(0) = 0$,

$x = 8$ — точка гладкого максимума, $y_{\max}(8) = 4/3$.

Эскиз графика:

$y = 0 \Leftrightarrow x = 27$

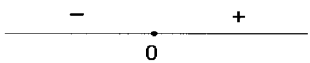
$y(-8) = 20/3$.

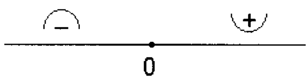


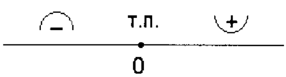
7.1. $y' = \dfrac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

7.2. $y'' = \dfrac{4}{9}\dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x^5}}$.

7.3. $x = 0$ — критическая точка II рода, так как $\lim\limits_{x \to 0} y'' = \infty$.

7.4. 

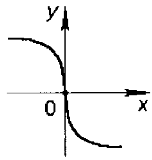
7.5. 

7.6. 

; $x = 0$ является точкой перегиба.

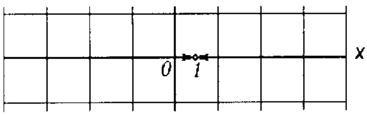
Вычислим значение производной y' в точке $x = 0$: $y'(0) = \infty$. Это говорит о том, что касательная к графику функции в точке $x = 0$ вертикальна.

Можно теперь построить эскиз графика данной функции в окрестности точки $x = 0$:

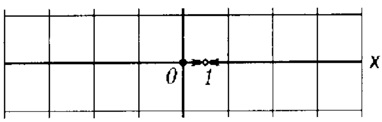


См. правило 4, п. 2.

8.1. Изобразим область определения функции $y = x^3/(x-1)^2$ $x \subset (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ на числовой оси:



8.2. Изобразим точку $(0,\ 0)$ пересечения функции с осями координат:

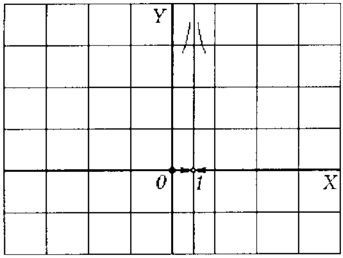


8.3. $y(-x) = -\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

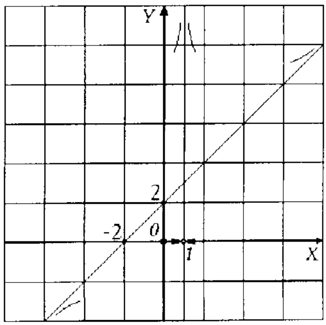
8.4. $y = x^3/(x-1)^2$ — функция общего вида.

8.5. Вертикальная асимптота может быть в точке $x = 1$.

8.6. $A = B = +\infty$. Полученную асимптоту $x = 1$ и поведение функции при $x \to 1 \pm 0$ отражаем на эскизе графика.



8.7. Полученную асимптоту $y = x + 2$ и поведение функции при $x \to 1 \pm 0$ отражаем на эскизе графика.

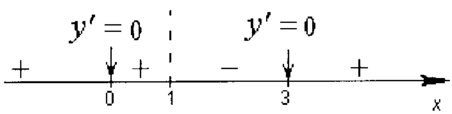


8.8. Производная функции $y = x^3/(x-1)^2$ равна

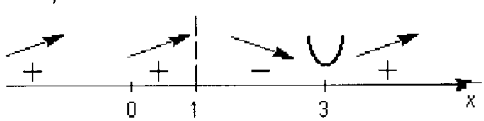
$$y' = x^2(x-3)/(x-1)^3 .$$

8.9. Критические точки $x = \{0;\ 1;\ 3\}$.

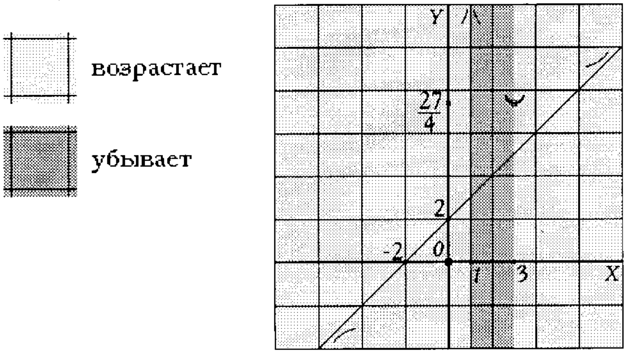
8.10.



8.11. В точке $x = 3$ функция $y = x^3/(x-1)^2$ достигает минимума $y_{\min}(3) = 27/4$.

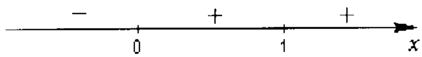


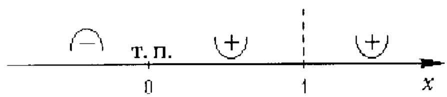
Полученные результаты наносим на эскиз графика.



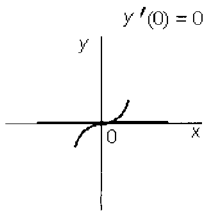
8.12. Вторая производная функции $y = x^3/(x-1)^2$ равна $y'' = 6x/(x-1)^4$.

8.13. Критические точки $x = \{0;\ 1\}$.

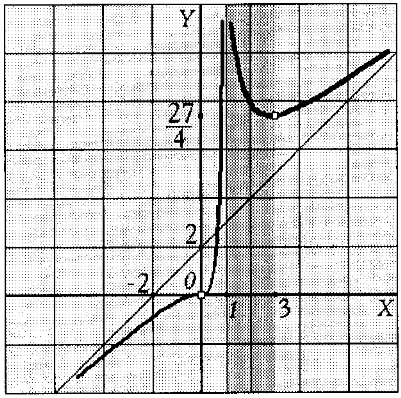
8.14. 

8.15. 

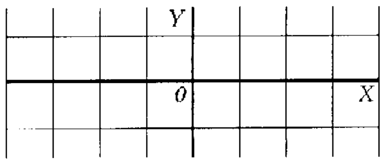
8.16. Касательная к графику функции в точке $(0,0)$ горизонтальна.



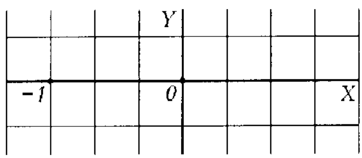
8.17. Получаем график функции $y = x^3/(x-1)^2$:



9.1. Область определения функции $y = x + \sqrt[3]{x^2}$ $x \subset (-\infty, +\infty)$ изобразим на числовой оси:



9.2. График функции $y = x + \sqrt[3]{x^2}$ пересекает оси координат в точках $(-1,\ 0)$ и $(0,\ 0)$.



9.3. $y(-x) = -x + \sqrt[3]{x^2}$.

9.4. $y = x + \sqrt[3]{x^2}$ – функция общего вида.

9.5. Функция $y = x + \sqrt[3]{x^2}$ не имеет вертикальной асимптоты.

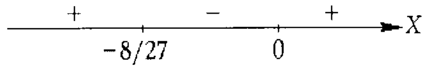
9.6. Получили $k=1$, $b=\infty$. Функция $y=x+\sqrt[3]{x^2}$ не имеет наклонной асимптоты.

9.7. Производная функции $y=x+\sqrt[3]{x^2}$ равна

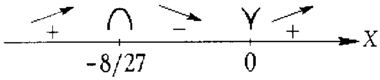
$$y'=\left(3\sqrt[3]{x}+2\right)\Big/3\sqrt[3]{x}\ .$$

9.8. Критические точки $x=-8/27$ и $x=0$.

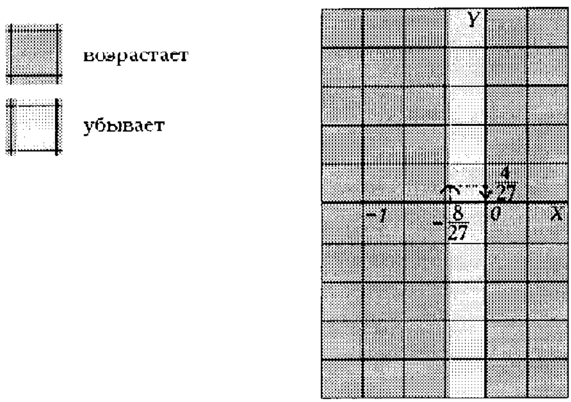
9.9.



9.10.



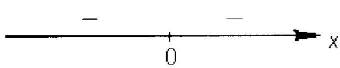
Функция $y=x+\sqrt[3]{x^2}$ достигает минимума в точке $x=0$: $y_{\min}(0)=0$, а максимума в точке $x=-8/27$: $y_{\max}(-8/27)=4/27$. Полученные результаты наносим на эскиз графика:



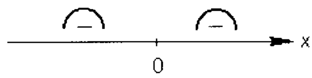
9.11. Вторая производная функции $y=x+\sqrt[3]{x^2}$ равна $y''=-2\Big/9\sqrt[3]{x^4}$.

9.12. Получена критическая точка второго рода $x=0$.

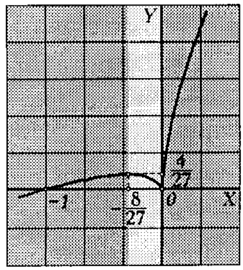
9.13.



9.14. Точка $x = 0$ не является точкой перегиба.



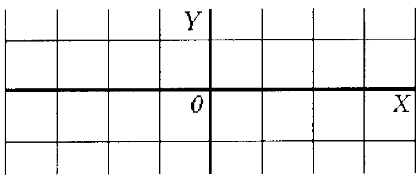
9.15. Строим график данной функции:



Для более точного построения графика можно взять контрольные точки:

$$y(1) = 2\,;\;\; y\left(1/8\right) = 1/8 + 1/4 = 3/8\,.$$

10.1. Область определения функции $y = xe^{-x^2/8}$: $x \in \left(-\infty, +\infty\right)$. Изобразим ее на числовой оси:



Найдем точки пересечения графика функции с осями координат: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $y = 0 \Rightarrow xe^{-x^2/8} = 0 \Rightarrow x = 0$; $e^{-x^2/8} \neq 0$.

Получили одну точку $(0;\;\; 0)$. Наносим ее на числовую ось.

10.2. Получили: $y(-x) = -xe^{-x^2/8}$.

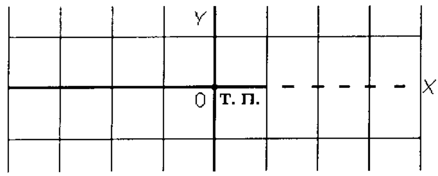
10.3. $y = xe^{-x^2/8}$ — нечетная функция.

10.4. Так как график функции $y = xe^{-x^2/8}$ симметричен относительно начала координат, далее можно исследовать эту функцию только на множестве $x \in [0, +\infty)$. Точка $x = 0$ принадлежит графику функции.

10.5. $x = 0$ — точка перегиба (т.п.) графика функции $y = xe^{-x^2/8}$.

10.6. Функция $y = xe^{-x^2/8}$ не имеет вертикальной асимптоты.

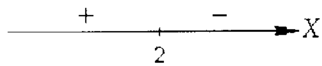
10.7. $k = 0$, $b = 0$. Получили горизонтальную асимптоту $y = 0$:



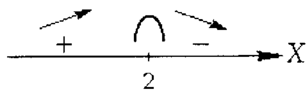
10.8. $y' = -\frac{1}{4}e^{-x^2/8}(x-2)(x+2)$.

10.9. Критические точки I рода: $x = -2$ и $x = 2$.

10.10.

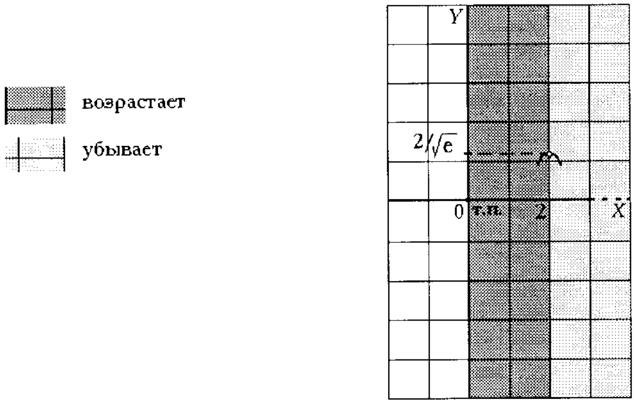


10.11.



Функция $y = xe^{-x^2/8}$ имеет максимум: $y_{\max}(2) = 2/\sqrt{e} \approx 1,2$.

Полученные результаты наносим на эскиз графика:

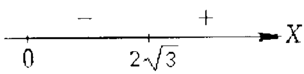


Можно утверждать, что справа от точки $x = 2$ находится точка перегиба.

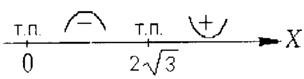
10.12. $y'' = 1/16\, x e^{-x^2/8}\left(x - 2\sqrt{3}\right)\left(x + 2\sqrt{3}\right)$.

10.13. Критические точки II рода: $x = 0$ и $x = 2\sqrt{3}$.

10.14. Получили следующий результат:



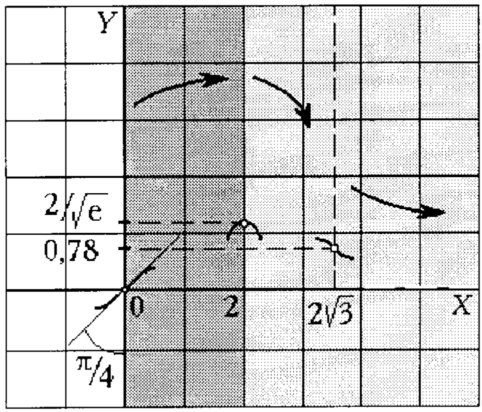
10.15. Получили результат:



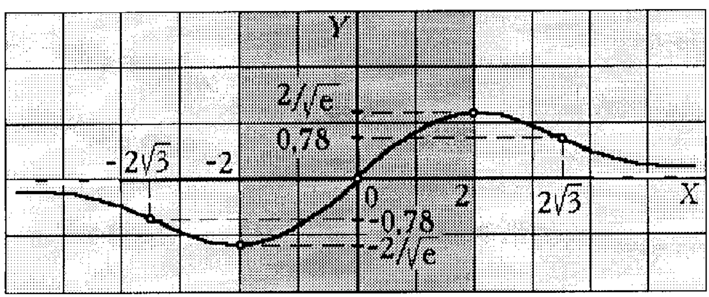
Значение функции $y = xe^{-x^2/8}$ в точке перегиба $x = 2\sqrt{3}$: $y\left(2\sqrt{3}\right) = \sqrt{12/e^2} \approx 0,78$.

Тангенс угла наклона касательной к графику в точке перегиба $x = 0$: $y'(0) = 1$;

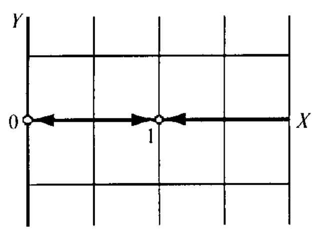
$\operatorname{tg}\alpha_{x=0} = 1 \Rightarrow \alpha = \pi/4$; $y'(2\sqrt{3}) = -1/\sqrt{5}$.



10.16. Строим правую часть графика и отображаем ее симметрично относительно начала координат:



11.1. Область определения функции $x \in (0,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$ изобразим на числовой оси:



11.2. Точек пересечения с осями координат нет.

11.3. Так как $y(-x)$ вычислить нельзя, $(-x)$ не принадлежит области определения, то данная функция является функцией общего вида (не четная и не нечетная).

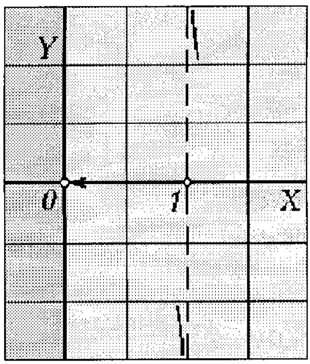
11.4. Функция может иметь в точках $x=0$ и $x=1$ вертикальные асимптоты.

11.5. $\lim\limits_{x \to +0} y(x) = 0$.

11.6. Функция $y = x/\ln x$ в точке $x=0$ не имеет вертикальной асимптоты, график в окрестности начала координат стремится к точке $(0,0)$.

11.7. $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} y(x) = \pm\infty$.

11.8. График функции имеет вертикальную асимптоту в точке $x=1$ и подходит к точке $(0,0)$ на границе области определения.



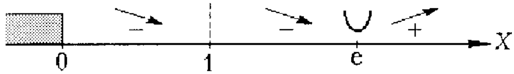
11.9. $k=0$, $b=\infty$. График функции $y = x/\ln x$ не имеет наклонной асимптоты.

11.10. Производная функции $y = x/\ln x$ равна

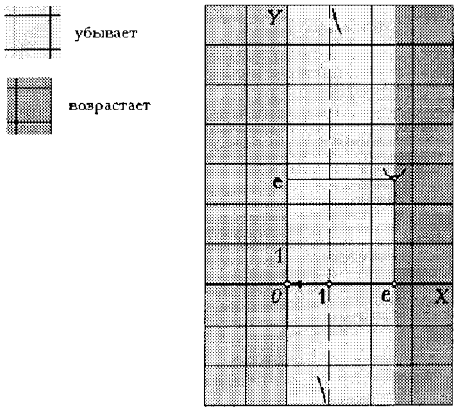
$y' = (\ln x - 1)/\ln^2 x$.

11.11. Функция $y = x/\ln x$ имеет две критические точки $x=1$ и $x=e$. Нанесите их на числовую ось.

11.12. 

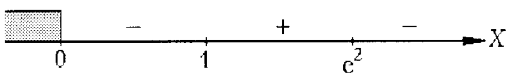
11.13. 

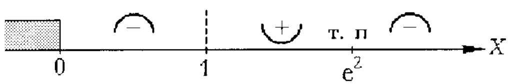
Функция $y = x/\ln x$ достигает минимума в точке $x = e$: $y_{\min}(e) = e$. Результаты переносим на эскиз графика:



11.14. $y'' = -(\ln x - 2)/x\ln^3 x$.

11.15. Критические точки $x = 1$ и $x = e^2$.

11.16. 

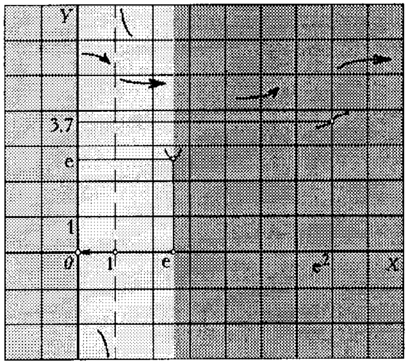
11.17. 

$x = e^2$ — точка перегиба (т.п.) графика функции.

Значение функции в точке перегиба: $y(e^2) = e^2/2 \approx 3,7$.

Тангенс угла наклона касательной к графику в точке перегиба $y'(e^2) = 1/4$.

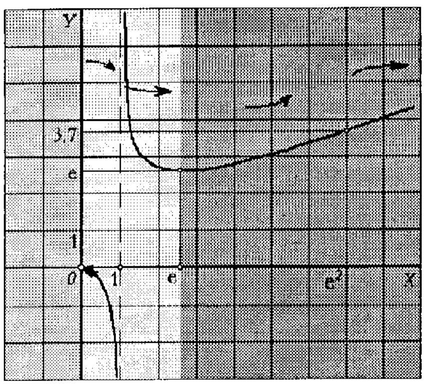
Полученные результаты переносим на эскиз графика



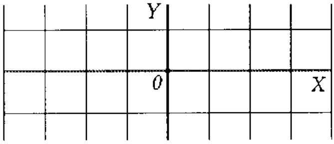
11.18. $\lim\limits_{x \to +0} y' = 0$.

11.19. Касательная к графику функции $y = x/\ln x$ в точке $x = 0$ горизонтальна.

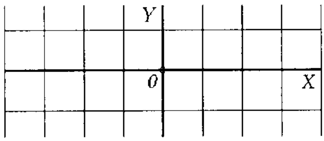
11.20. График функции $y = \dfrac{x}{\ln x}$.



12.1. Область определения функции $x \in (-\infty, +\infty)$ изобразим на числовой оси:



12.2. Функция $y = x \operatorname{arctg} x$ имеет одну точку пересечения с осями координат: $(0,0)$. Наносим ее на эскиз графика:



12.3. $y(-x) = x \operatorname{arctg} x$.

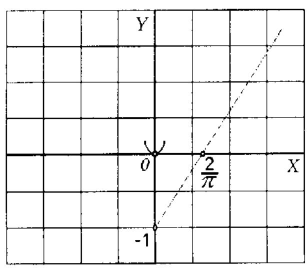
12.4. Функция $y = x \operatorname{arctg} x$ — четная.

12.5. График функции $y = x \operatorname{arctg} x$ симметричен относительно оси OY. Далее достаточно исследовать функцию только на множестве $x \in [0, +\infty)$ и после построения графика в этой области, отразить его на множестве $x \in (-\infty, 0]$ симметрично относительно оси $0Y$.

12.6. Точка $(0, 0)$ является точкой экстремума.

12.7. Функция $y = x \operatorname{arctg} x$ вертикальных асимптот не имеет.

12.8. Получили при $x \to +\infty$ асимптоту $y = \pi x/2 - 1$. Строим ее на эскизе графика. Теперь можно сказать, что точка $x = 0$ будет непременно, точкой минимума, так как если бы это была точка максимума, то, чтобы приблизиться к асимптоте $y = \pi x/2 - 1$ при $x \to +\infty$, графику надо было бы пересечь ось OX, а таких точек пересечения нет.

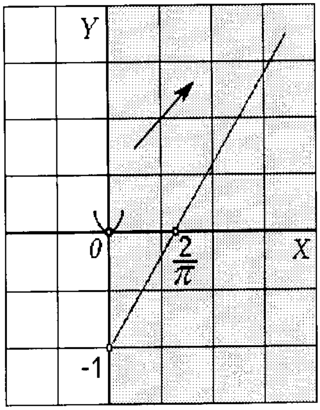


12.9. $y' = \dfrac{(1+x^2)\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2}$.

12.10. Одна критическая точка $x = 0$ — точка минимума (см. 12.6. и 12.8).

12.11. $y' > 0$ на множестве $x \in (0, +\infty)$.

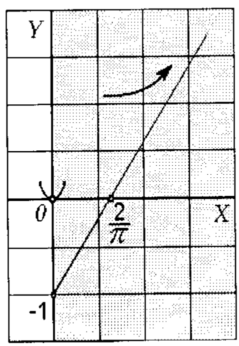
12.12. В области исследования $x \in [0, +\infty)$ функция возрастает.



12.13. $y'' = 2/(1+x^2)^2$.

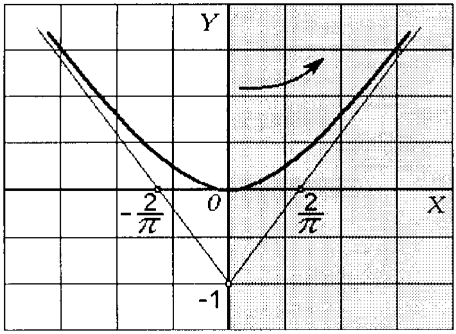
12.14. В области исследования $x \in [0, +\infty)$ критических точек II рода нет, следовательно, кривая функции $y = x \operatorname{arctg} x$ в этой области либо выпуклая вверх, либо выпуклая вниз.

12.15. Очевидно, что $y'' > 0$. На множестве $x \in [0, +\infty)$ кривая имеет выпуклость вниз. Полученные результаты переносим на эскиз графика.



От начала координат к асимптоте вправо кривая имеет выпуклость вниз и возрастает. Построив эту часть графика, отображаем ее симметрично относительно оси OY (вместе с асимптотой) на множестве $x \in (-\infty,\ 0]$.

12.16. График функции $y = x \operatorname{arctg} x$ имеет вид, представленный на рисунке.

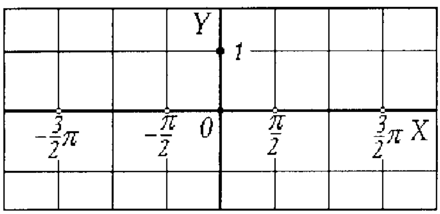


13.1. Область определения данной функции:

$$x \in R \setminus \{\pi/2 + \pi k,\ k \in Z\}.$$

13.2. Точка пересечения с осью OY : $(0,\ 1)$. С осью OX точек пересечения нет.

Наносим полученные результаты на эскиз графика функции.



13.3. $y(-x) = e^{-\operatorname{tg} x}$.

13.4. Функция $y = e^{\operatorname{tg} x}$ общего вида.

13.5. Функция $y = e^{\operatorname{tg} x}$ является периодической с периодом $T = \pi$, так как $e^{\operatorname{tg} x(x+\pi k)} = e^{\operatorname{tg} x}$, $k \in Z$.

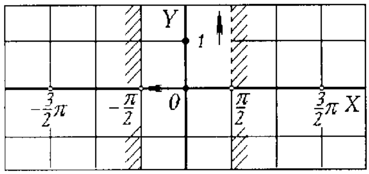
Учитывая, что функция периодическая, исследуем ее и построим график на одном периоде, например для $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

13.6. Вертикальные асимптоты могут быть в точках $x = \pi/2 + \pi k$.

13.7. $\lim\limits_{x \to \pi/2-0} \operatorname{tg} x = 0$, асимптоты нет, график функции стремится к точке разрыва с координатами $(-\pi/2,\ 0)$ справа.

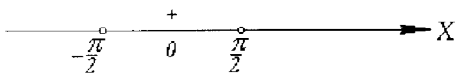
13.8. Вертикальная асимптота $x = \pi/2$ (при подходе слева $y \to +\infty$).

Строим эскиз. Наклонной асимптоты график периодической функции иметь не может!

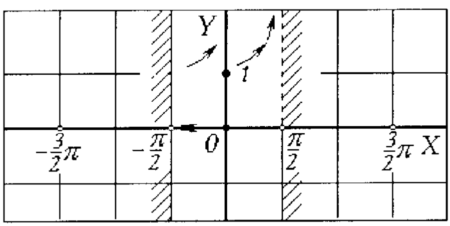


13.9. $y' = e^{\operatorname{tg} x} \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

13.10. Критических точек I рода на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ нет.

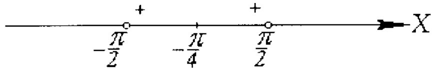
13.11. 

13.12. Функция $y = e^{\operatorname{tg} x}$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ возрастает. Отметим это на эскизе:

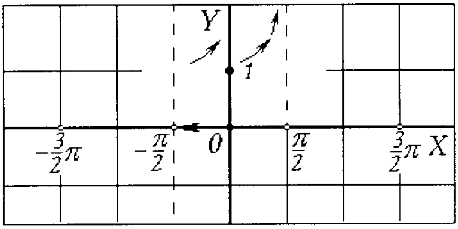


13.13. $y'' = e^{\operatorname{tg} x} \dfrac{1 + \sin 2x}{\cos^4 x}$.

13.14. Критическая точка II рода на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ одна: $x = -\pi/4$.

13.15. 

13.16. Кривая на всем интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ выпуклая вниз, точка $x = -\pi/4$ не является точкой перегиба.



13.17. Дополнительно вычислим:

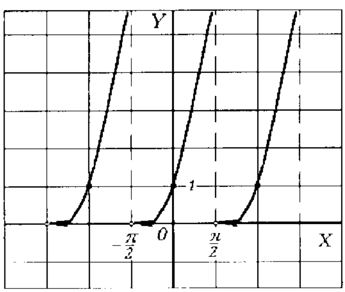
$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} y' = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} e^{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x} = [0\cdot\infty] =$$

$$= \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} \frac{\cos^{-2} x}{e^{-\operatorname{tg} x}} = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} \left(-2\operatorname{tg} x\, e^{\operatorname{tg} x}\right) =$$

$$= [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} \left(-2\frac{\operatorname{tg} x}{e^{-\operatorname{tg} x}}\right) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} 2e^{\operatorname{tg} x} = 0.$$

К точке $(-\pi/2;\ 0)$ справа график подходит с горизонтальной касательной (см. правило 4, п. 4г).

Учитывая периодичность функции, строим ее график на интервале $x \in (-\pi/2; \pi/2)$, а затем достраиваем его, перенося на соседние интервалы $(-\pi/2 + k\pi;\ \pi/2 + k\pi)$.



14.1. Область определения данной функции $D_f : x \in (-\infty, +\infty)$ или $x \in R$.

14.2. Единственная точка пересечения графика с осями координат: $(0,0)$.

14.3. $y(-x) = -x - \sin x$.

14.4. Функция $y = x + \sin x$ является нечетной.

14.5. График данной функции симметричен относительно начала координат. Исследуем функцию только для $x \in [0, +\infty)$, строим часть графика, а затем отображаем ее симметрично относительно точки (0, 0).

14.6. Точка (0, 0) является точкой перегиба.

14.7. Функция $y = x + \sin x$ не является периодической.

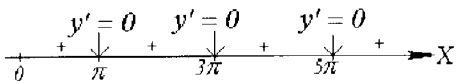
14.8. График данной функции вертикальных асимптот не имеет.

14.9. Наклонной асимптоты нет.

14.10. $y' = 1 + \cos x$.

14.11. Критические точки I рода: $x = \pi + 2\pi k$.

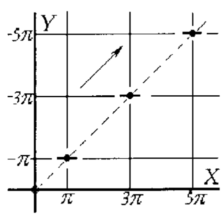
14.12. Получили следующий результат:



14.13. Функция возрастает (↗) на всей части числовой оси $x \in (0, +\infty)$.

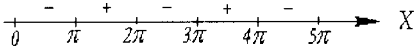
14.14. График функции проходит через точки $(\pi + 2\pi к;\ \pi + 2\pi к)$ с горизонтальными касательными.

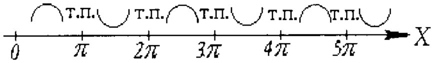
Отметим полученные результаты на эскизе:



14.15. $y'' = -\sin x$.

14.16. Критические точки II рода: $x = \pi k,\ k \in Z$.

14.17. 

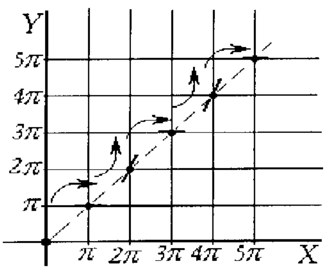
14.18. 

Вычислим $y_{т.п.}(\pi k) = \pi k,\ k \in \mathrm{Z}$.

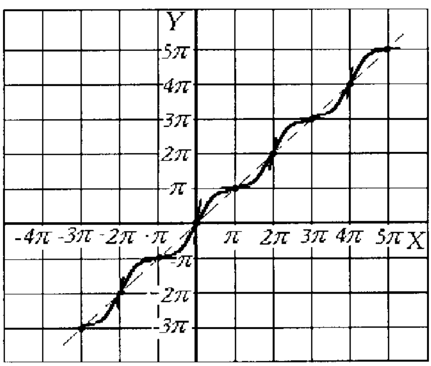
Точки перегиба $(\pi k; \pi k)$ лежат на прямой $y = x$. Часть из них $(\pi(2k+1); \pi(2k+1))$ уже отмечены на нашем эскизе. В остальных вычислим значение y', чтобы знать, с какой касательной через них проходит график функции.

$y'(2\pi k) = 2$; $\operatorname{tg} \varphi_{кас.(2\pi k, 2\pi k)} = 2$.

Отмечаем новые точки перегиба $(2\pi k, 2\pi k)$ на эскизе:



14.19. Строим график в правой части плоскости для $x \in [0, +\infty)$, затем отражаем его симметрично относительно начала координат:



СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

А.А. Грешилов, И.В. Дубограй

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ.
ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ.
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Учебное пособие

Редактор *Е.В. Комарова*
Корректор *Н.Г. Давыдова*
Оформление *С. Носова, Е. Молчанова*
Компьютерная верстка *О.Г. Лавровой*

Изд. лиц. ИД № 01670 от 24.04.2000

Подписано в печать 03.06.2003. Формат 84x108/32
Печать офсетная. Печ. л. 5,5. Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательско-книготорговый дом «Логос»
105318, Москва, Измайловское ш., 4